力学 II

岩山 隆寛*1

*1 e-mail：iwayama@fukuoka-u.ac.jp, 2020 年度版

目次

第 1 章

常微分方程式の解法

1.1 はじめに

力学に限らず物理学においては, 以下のような形をした微分方程式が頻繁に登場する：

$$A\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+Cx=0. \tag{1.1}$$

ここで, t は独立変数, x は t の関数で, A, B, C は t に依存しない定数である.[*1] この方程式を解いて, x を t の関数として表す方法を解説することがこの章の主題である.

以下ではほんの数例であるが, (1.1) の形の微分方程式に従う系が様々な状況で登場することを紹介する.

例 1： 放射性同位元素（例えば炭素 ^{14}C）の原子は一定の比率（単位時間当たり α の比率）で崩壊して安定な原子になる. このような放射性同位元素の原子の数 N は次の方程式に従う:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\alpha N. \tag{1.2}$$

(1.1) において, 解を x ではなく N と表記し, $A=0$, $B=1$, $C=\alpha$ とすれば (1.2) となる.

例 2： なめらかな水平面上で, 一端が固定されたバネ定数 k の線形バネ[*2]の他端に質点と見做せる質量 m の小物体がつながれている場合, バネの自然長からの小物体の変位 x は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+kx=0 \tag{1.3}$$

[*1] 物理学で現れる微分方程式では t は時間を表し, 一方 x は問題によって異なる物理量である.

[*2] バネの復元力が, バネの伸びに比例するバネのこと.

で与えられる運動方程式に従う．(1.1) において, $A = m$, $B = 0$, $C = k$ とすれば (1.3) となる．

例 3：　一様な重力場中で長さ l の伸びないひもの端に質量 m の質点と見做せる小物体がつるされていて, もう一方のひもの端を固定してそこを支点とした振り子を考える．この小物体の平衡点（最下点）からの振れ角 θ が従う運動方程式は

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\sin\theta = 0 \tag{1.4}$$

である．ここで, g は重力加速度である．(1.4) のままでは (1.1) の形の微分方程式ではないが, 振れ角 θ が小さい場合には (1.4) は

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\theta = 0 \tag{1.5}$$

と近似される．(1.1) において, 解を x ではなく θ と表記し, $A = ml$, $B = 0$, $C = mg$ とすれば (1.5) となる．

例 4：　例 2 の系で速度に比例する抵抗が物体に働いている場合には, 物体の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0 \tag{1.6}$$

となる．ここで, $\gamma > 0$ の定数である．(1.1) において, $A = m$, $B = m\gamma$, $C = k$ とすれば (1.6) となる．

例 5：　誘導係数 L のコイル, 静電容量 $\tilde{C}$ のコンデンサ, 抵抗値 R の抵抗を直列に繋いだ電気回路を流れる電流 I の時間発展は,

$$L\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tilde{C}}I = 0 \tag{1.7}$$

と書けることが知られている．(1.1) において, 解を x ではなく I と表記し, $A = L$, $B = R$, $C = \frac{1}{\tilde{C}}$ とすれば (1.7) となる．

1.2　言葉の定義（その１）

(1.1) のように微分を含んだ方程式を微分方程式という．独立変数が 1 個の場合は方程式に含まれる微分は常微分なので, 常微分方程式とも呼ばれる．[*3]

[*3] 本節では, 特に断らない限り常微分方程式を微分方程式と呼ぶことにする．独立変数が 2 個, 例えば空間 x と時間 t に依存するような関数の微分には, $\frac{\partial}{\partial t}$ や $\frac{\partial}{\partial x}$ といった偏微分が存在する．このような偏微分を含んだ方程式は偏微分方程式と呼ばれる．

微分方程式に含まれる微分の最高階数をもって, その微分方程式の階数という. (1.1) は $A=0$, $B\neq 0$ のとき, 1 階の常微分方程式である. $A\neq 0$ の場合は (1.1) は 2 階の常微分方程式である. 前節の例 1 は 1 階の微分方程式であるが, 例 2〜5 は 2 階の微分方程式である.

定数を $c_1, c_2, \ldots, c_n$ で表し, これらは任意の値を取るものとする. このような定数を任意定数と呼ぶ. 微分方程式を満たす解が任意定数を含む形で表現されるとき, そのような解を一般解という.[*4] 一般解に含まれる定数に特定の値を代入して得られる解を特殊解という. 微分方程式の一般解や特殊解を求めることを微分方程式を解くという.

1.3　変数分離法による 1 階の常微分方程式の解法

2 階の微分方程式 (1.1) を解く前に, 1 階の微分方程式を解く代表的な例を紹介しよう.

(1.1) で $A=0$, $(B\neq 0)$ とした場合を含み, もう少し一般的な形の 1 階の常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,t) \tag{1.8}$$

を考える.[*5] $f(x,t)$ は x と t の既知の関数である. 特に, $f(x,t)$ が

$$f(x,t)=F(x)G(t) \tag{1.9}$$

と x のみの関数 $F(x)$ と t のみの関数 $G(t)$ の積としてかける場合, すなわち

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x)G(t) \tag{1.10}$$

と書ける場合を考える. このとき (1.10) は次のように変形できる:[*6]

$$\frac{\mathrm{d}x}{F(x)}=G(t)\mathrm{d}t. \tag{1.11}$$

(1.11) の両辺を不定積分することにより微分方程式 (1.10) の一般解を得ることができる:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{F(x)}=\int G(t)\mathrm{d}t. \tag{1.12}$$

この方法は, (1.11) のように左辺は x のみの関数, 右辺は t のみ関数と, 右辺と左辺とが別々の変数を含むような式に分離して微分方程式を解く方法なので変数分離法と呼ばれている.

---

*4 任意定数は初期条件を満たすように決定される. 任意定数を含む解は, 任意の初期条件に対する一般的な状況における微分方程式の解を表す, という意味で一般解と呼ばれる.

*5 (1.1) は $f(x,t)=-Cx/B$ に対応する.

*6 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ の記号は, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ がひとまとまりで意味を成す. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ という記号は, この記号の後に続く関数を t で微分する, ということを表している. しかしながら微分を含む計算では $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ をあたかも分数のように考えて, その分母に相当する $\mathrm{d}t$ と分子に相当する $\mathrm{d}x$ を分離して取り扱ってもいい場合がある.

■補足　一般に, 1 階の微分方程式は形式的に 1 回不定積分すれば一般解が求まるので, 1 階の微分方程式の一般解には不定積分に伴う任意定数が一つ含まれる. (1.12) では左辺の積分で 1 個, 右辺の積分で 1 個出てくるが, これをひとまとめにして一つの任意定数にできる.

1.4　言葉の定義（その 2）

本章の主題である (1.1) の解法に話題を戻す.

(1.1) を解く前に, その性質について議論をしておく. (1.1) は次のような 2 つの性質を満足することがわかる：

i) 微分方程式の独立な 2 つの解 x_1 と x_2[*7]があったとき, $x_1 + x_2$ も元の微分方程式の解になっている. 実際に (1.1) の x に $x_1 + x_2$ を代入すると,

$$
\begin{aligned}
&A\frac{\mathrm{d}^2(x_1+x_2)}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}(x_1+x_2)}{\mathrm{d}t} + C(x_1+x_2) \\
&= \left\{A\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + Cx_1\right\} + \left\{A\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + Cx_2\right\} \\
&= 0 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

ここで, 2 行目から 3 行目への変形には x_1 と x_2 がそれぞれ (1.1) の解であること (1.13) を用いた.

ii) 微分方程式の解 x を任意定数倍したもの, 即ち ax, も元の微分方程式の解になっている. ここで a は任意定数である. 実際に (1.1) の x に ax を代入すると,

$$
\begin{aligned}
&A\frac{\mathrm{d}^2(ax)}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}(ax)}{\mathrm{d}t} + C(ax) \\
&= a\left\{A\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Cx\right\} \\
&= a \times 0 = 0. \qquad (1.14)
\end{aligned}
$$

[*7] つまり $x_1 \neq x_2$ となる x_1, x_2 がそれぞれ

$$A\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + Cx_1 = 0, \qquad (1.13a)$$

$$A\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + Cx_2 = 0, \qquad (1.13b)$$

を満たす.

ここで, 2 行目から 3 行目への変形には (1.1) を用いた.

上記の 2 つの性質 i), ii), を満足する微分方程式を線形微分方程式と呼ぶ. もしくは, 上記の i), ii) の性質をひとつにまとめて,

> “微分方程式の独立な 2 つの解 x_1 と x_2 があったとき, 任意定数を c_1, c_2 として $c_1x_1 + c_2x_2$ も元の微分方程式の解となっているとき, その微分方程式は線形微分方程式と呼ばれる”

と言える.

■重ね合わせの原理　一般に, 微分方程式の独立な解が複数個 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が見つかったとき, それらをおのおの定数倍して足し合わせる操作を解の重ね合わせ, といい

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n \tag{1.15}$$

は重ね合わされた解という.*8 重ね合わされた解も元の微分方程式を満足するとき, 重ね合わせの原理が成り立つという. したがって, 線形微分方程式は重ね合わせの原理が成り立つ微分方程式である, とも言える.

以下で見るように線形常微分方程式のこの性質は微分方程式の一般解*9を構成するときに必要な知識である.

1.5　定数係数の 2 階線形常微分方程式の解法 (1)

ここでは, (1.1) の解法として, 代表的なものを紹介する. 特に, “推定法”と呼ばれるもの取り上げることにする. *10

*8 線形結合ともいう.

*9 任意定数を含んだ微分方程式の解のこと.

*10 2000 年度からある大学で微分方程式に関する講義を担当してきたが, 2007 年度の前期にある学生からの指摘を受けて, “推定法”という言い方は一般的ではないことに気づいた. 私は大学 1 年生の物理数学の講義でここで紹介する“推定法” という方法を呼び名も含めて習った. 講義を担当していた先生は, 原子核物理学の理論を専門とする先生で, 講義のうまさには定評があった. その先生がいい加減なことを教えていたとは思えない. しかしながら, 指摘されて改めて調べてみると, 本講義で紹介する方法を “推定法” と呼んでいる物理数学の本が見当たらないのである. ためしに Google でネット検索してみても, “推定法”, 微分方程式” のキーワード検索で上位にかかるものは別の推定法である. （因みに, 私の講義ノートが結構上位でヒットする. ）ただし, ネット検索していて気づいたのであるが, (2007 年の時点で) 東海大学理学部物理学科（私の出身大学）のシラバスには微分方程式の解法として, “推定法” の名前が挙げられていた. 私が東海大学で物理数学を習ったのは 20 年以上前であり, それを教えていた先生は今は既に退職している. しかしながら, “推定法” の名前はいまだに東海大学に残っているのである. 以上の様なわけ

(1.1) を $A \neq 0$ で割り, (1.1) を改めて

定数係数 2 階線形微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Bx = 0. \tag{1.16}$$

と書くことにする. (1.16) の解を指数関数

$$x = e^{\lambda t}, \tag{1.17}$$

と推定する. ここで, λ は定数である. (1.17) を (1.16) に代入して整理すると,

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \tag{1.18}$$

という λ に関する代数方程式が得られる.*11 (1.18) は (1.16) の特性方程式と呼ばれる. (1.17) のように微分方程式の解を推定すると, 微分方程式は代数方程式に帰着される.

特性方程式 (1.18) の解は一般に 2 個ある. なぜならば, 2 次方程式の解は一般に 2 個であるからである.*12 その解を λ_1, λ_2, (ただし, $\lambda_1 \neq \lambda_2$) とする:

$$\lambda_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}. \tag{1.19}$$

そこで, (1.19) の結果と (1.17) を考慮すると, 微分方程式の解は

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = e^{\lambda_2 t} \tag{1.20}$$

の二つとなる. しかしながら, 前節で述べたように, x_1, x_2 がともに線形微分方程式の独立な解であるので, 重ね合わせの原理により

$$\begin{aligned} x &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{1.21}$$

も微分方程式の解となる. (1.19) を持つ (1.21) が (1.16) の一般解である. より明確に書くと, (1.16) の一般解は

で, “推定法” という呼び名は, 注意して使って欲しい. ただし, 以下に解説するように “推定法” は, この手法をよく反映した名前になっていることは理解してくれるだろう.

*11 (1.17) を (1.16) に代入すると $(\lambda^2 + A\lambda + B)e^{\lambda t} = 0$ が得られる. ただし, $e^{\lambda t} = 0$ となる解は $x = 0$ という自明な解である. 非自明な解は (1.18) を満たすが, そのような解には興味がないのでここでは非自明な解 $x \neq 0$ を求める. 特に断らない限り, 微分方程式を解くとは非自明な解を求めることを指す.

*12 特性方程式が重解を持つ場合, 即ち $A^2 - 4B = 0$ を満たす場合, については次節で扱う.

(1.16) の一般解 (ただし, $A^2 - 4B \neq 0$ の場合)

$$x = c_1 e^{\left(\frac{-A+\sqrt{A^2-4B}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{-A-\sqrt{A^2-4B}}{2}\right)t} \tag{1.22}$$

である.[*13]

■**補足 1**　一般に, 2 階の微分方程式は, 形式的には 2 回の不定積分を実行することにより解が求まる. 1 回不定積分を実行すると積分定数である任意定数が一つ現れる. そこで, 2 階の微分方程式の一般解には, 形式的な 2 回の不定積分により, 積分定数である任意定数が 2 個現れることになる. (1.22) は任意定数 c_1, c_2 を含んでいるので, (1.21) が微分方程式 (1.16) の一般解として充分であることが理解されるであろう.

■**補足 2**　任意定数を決定して特殊解を導出するには, ある特定の t の値における, x や $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ の値が必要である.[*14] 時間発展問題[*15]では, このような条件はいわゆる初期条件, $t = 0$ における x や $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ の値, として与えられる.

1.6　定数係数の 2 階線形常微分方程式の解法 (2)

前節では c を定数として $x = ce^{\lambda t}$ を与えられた微分方程式の解であると推定し, それを微分方程式に代入して微分方程式の特性方程式を作り, 特性方程式を解くことによって λ を求め, 解きたいの微分方程式の一般解を構成する方法を説明した.[*16] しかし, 前節の方法が適用できない場合もある. 特性方程式の解が重解になる場合 (特性方程式の解が一つ（それを λ_1 とする）しか求まらない場合) がそのような場合である. このときには解の推定 $x = ce^{\lambda t}$ の一部が誤りであると判断し, 改めて解を $x = c(t)e^{\lambda_1 t}$ と推定する. つまり, c を定数ではなく, t に依存した関数と考えるのである. このような方法は係数変化法と呼ばれる. このようにすると, c に関する微分方程式が得られるので, これを解いて推定した解の形 $x = c(t)e^{\lambda_1 t}$ に改めて代入すればよい. なお, 係数変化法を用いる場合でも, 解が $e^{\lambda t}$ に比例するという先に紹介した“推定法”が基本になっていることに注意し

[*13] (1.22) の指数部分が複雑で文字が小さくなって見にくいので

$$x = c_1 \exp\left\{\left(\frac{-A+\sqrt{A^2-4B}}{2}\right)t\right\} + c_2 \exp\left\{\left(\frac{-A-\sqrt{A^2-4B}}{2}\right)t\right\}$$

と書く場合もある.

[*14] 2 階の微分方程式の一般解には 2 個の任意定数を含むので, この任意定数の決定には 2 個の条件を与えればよい.

[*15] 時間微分 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ を含む微分方程式の問題のこと.

[*16] 前節では $x = e^{\lambda t}$ という形の推定をしたが, これを任意定数 c 倍したものもまったく同じ特性方程式を満足する. したがって, 前節の解の推定は一般には, $x = ce^{\lambda t}$ としたものとも解釈できる.

てほしい.[*17]

特性方程式が重解を持つ場合の微分方程式の解法は, 具体例を使って説明する.

例: 微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+4x=0 \tag{1.23}$$

を解く. この微分方程式の解を $x=ce^{\lambda t}$ と推定する. ここで, c は任意定数である. (1.23) の特性方程式は,

$$\lambda^2+4\lambda+4=0 \tag{1.24}$$

となり, この解は $\lambda=-2$ の重解となる. そこで, 係数変化法を用いて

$$x=c(t)e^{-2t} \tag{1.25}$$

と改めて解を推定し直し, (1.25) を (1.23) に代入する. その結果,

$$\frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}t^2}=0 \tag{1.26}$$

が得られる. (1.26) は単純に 2 回不定積分すれば c が求まり, その一般解は $c=c_1t+c_2$ である. ここで, c_1, c_2 は任意定数である. したがって, 微分方程式 (1.23) の一般解は

$$x=(c_1t+c_2)\,e^{-2t} \tag{1.27}$$

となる.

■注意： (1.27) には任意定数が 2 個（c_1 と c_2）含まれている. つまり, 2 階の微分方程式の一般解として充分である. 初めの推定で得られた $x(t)=ce^{-2t}$, ここで c は任意定数, の形では任意定数が 1 個しか含まれていないので, 2 階の微分方程式の一般解としては不十分である. 初めの推定で得られた解を利用して, (1.25) のように改めて推定し直して解を求めないといけない.

一般的には, 特性方程式が重根を持つ ($A^2-4B=0$) 場合, (1.16) の一般解は

(1.16) の一般解 (ただし, $A^2-4B=0$ の場合)

$$x=(c_1t+c_2)e^{\left(-\frac{A}{2}\right)t} \tag{1.28}$$

である. (1.23) は (1.16) において $A=4$, $B=4$ としたものに対応する. 実際に, (1.28) において $A=4$ とすると, (1.23) に帰着する.

[*17] 先ずは λ を決めるために, 推定法を使用する必要がある.

1.7　非斉次型の微分方程式の解法

1.7.1　解説

物理学においては, (1.16) の右辺に既知の関数（いわゆる外力項）$f(t)$ を含むような形の微分方程式も頻繁に登場する：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Bx = f(t). \tag{1.29}$$

ここで, A, B は定数である.

例 1:　質量 m の物体がバネ定数 k の線形バネにつながれており, さらに速度に比例する抵抗と周期的な外力 $f\sin\omega_0 t$ が物体に働いている場合, 質点の平衡位置からのずれ x が従う運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F_0\sin\omega t, \tag{1.30}$$

となる. ここで, F_0 は定数である.

例 2：　誘導係数 L のコイル, 抵抗値 R の 抵抗, 静電容量 C を持ったコンデンサを直列に接続した回路に起電力 $E(t)$ を加える. この回路を流れる電流 I は次のような微分方程式に従う：

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = \frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{1.31}$$

例 3：　重力加速度が g の一様な重力場中を, 速度に比例した抵抗を受けながら落下する質量 m の物体の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -mg$$

と表される. ここで, γ, g は正の定数である.

一般に (1.29) のような微分方程式で, 右辺の $f(t)$ がゼロであるような方程式, すなわち前節までに扱ってきたものを<u>斉次</u>微分方程式と呼び, 右辺が 0 でない場合を<u>非斉次</u>微分方程式とよぶ.[*18] 斉次微分方程式が線形であれば, 非斉次微分方程式の一般解は, 以下のように簡単に構成できる.

[*18] 斉次は「せいじ」と読む. 「さいじ」ではないので注意. もしくは同次ともいう. 英語では homogeneous という語である.

非斉次微分方程式 (1.29) の一般解は, 斉次微分方程式 (1.16) の一般解 x_{g} と, (1.29) を満足する解のうちの一つ(これは任意定数を含まない特殊解である) x_{p} の和として表現できる.*19 即ち, $x = x_{\mathrm{g}} + x_{\mathrm{p}}$ である. 実際に斉次微分方程式の線形性から x_{g}, x_{p} がそれぞれ

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} + Bx_{\mathrm{g}} = 0,\\
&\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} + Bx_{\mathrm{p}} = f(t).
\end{aligned}
$$

を満足すれば, (1.29) に $x = x_{\mathrm{g}} + x_{\mathrm{p}}$ を代入して

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2(x_{\mathrm{g}} + x_{\mathrm{p}})}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}(x_{\mathrm{g}} + x_{\mathrm{p}})}{\mathrm{d}t} + B(x_{\mathrm{g}} + x_{\mathrm{p}})\\
&\left\{\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} + Bx_{\mathrm{g}}\right\} + \left\{\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} + Bx_{\mathrm{p}}\right\}\\
&= 0 + f(t) = f(t).
\end{aligned}
$$

すなわち, $x_{\mathrm{g}} + x_{\mathrm{p}}$ は非斉次微分方程式 (1.29) の一般解になっている.*20

■補足　特殊解が複数個見つかったときでも, そのうちの任意の 1 個のみを一般解 x_{g} に加えておけば (1.29) の解としては充分である. どの特殊解を選択するか, という自由度は一般解 x_{g} に含まれている任意定数で調整されるからである. 初期条件を考慮すれば, どの特殊解を選んでも最終的な解は唯一に決まる.

特殊解を求める方法は, 非斉次項 $f(t)$ がある特定の形を持つ場合, 常套手段が知られている. 例えば,

- $f(t)$ が n 次の多項式の場合: 特殊解を n 次の多項式 $x_{\mathrm{p}} = \sum_{m=0}^{n} a_m t^m$ と推定して, a_m を決定する.
- $f(t)$ が e^{pt} の場合: $x_{\mathrm{p}} = Ce^{pt}$ と推定して, C を決定する.
- $f(t) = \cos pt$ または $f(t) = \sin pt$ といった場合: $x_{\mathrm{p}} = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt$ と推定して, C_1, C_2 を決定する.
- 次小節例 3 で説明する微分方程式では係数変化法によって x_{p} を求める.

*19 一般解は general solution, 特殊解は paricular solution なので, それぞれ添え字 g, p を付けて表している.

*20 x_{g} に任意定数が 2 個含まれているので, $x_{\mathrm{g}} + x_{\mathrm{p}}$ は一般解と見做せる.

1.7.2　具体例

例 1　以下の様な微分方程式を考える：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=F_0\sin\omega t. \tag{1.32}$$

これは, 前小節の例 1 の (1.30) において質点に抵抗が働かない場合 ($\gamma=0$) の方程式である．なお, $\omega_0\equiv\sqrt{k/m}$ とし, $\omega_0\neq\omega$ とする．

微分方程式 (1.32) の斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=0 \tag{1.33}$$

の一般解は, $x_\mathrm{g}=c_1\sin\omega_0t+c_2\cos\omega_0t$ である[*21]．特殊解は, 解を $x_\mathrm{p}=f\sin\omega t$ と推定し, これをもとの方程式 (1.32) に代入して係数 f を定めればよい．ここで, f は定数とする．実際に代入すると

$$\frac{\mathrm{d}^2x_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x_\mathrm{p}=-\omega^2f\sin\omega t+\omega_0^2f\sin\omega t=F_0\sin\omega t.$$

従って $f=F_0/(\omega_0^2-\omega^2)$ を得る．よって, (1.32) の一般解は

$$x=c_1\sin\omega_0t+c_2\cos\omega_0t+\frac{F_0}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t \tag{1.34}$$

である．[*22]

例 2　次に前小節の例 1 で与えられた微分方程式を考える:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\gamma_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=F_0\sin\omega t. \tag{1.35}$$

ここで, $\gamma_0\equiv\gamma/m$, $\omega_0\equiv\sqrt{k/m}$ とし, $\omega_0\neq\omega$ とする．

微分方程式 (1.35) の斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t^2}+\gamma_0\frac{\mathrm{d}x_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x_\mathrm{g}=0 \tag{1.36}$$

の一般解は, $x_\mathrm{g}=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$ である．ここで λ_1, λ_2 は特性方程式 $\lambda^2+\gamma_0\lambda+\omega_0^2=0$ の 2 つの解である．ここでは改めてこの特性方程式は解かない．特殊解の求め方だけを解説する．特殊解は, 解を $x_\mathrm{p}=f_1\sin\omega t+f_2\cos\omega t$ と推定し, これ

---

*21 $x=c_1e^{i\omega_0t}+c_2e^{-i\omega_0t}$ と表現してもよい．

*22 特殊解を $x_\mathrm{p}=f_1\sin\omega t+f_2\cos\omega t$ と推定してもよいが, 経験をつむとこれは冗長な解の推定であることがわかる．

をもとの方程式 (1.35) に代入して係数 f_1, f_2 を定める. 推定した特殊解を元の微分方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 x_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t^2} + \gamma_0 \frac{\mathrm{d}x_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x_\mathrm{p} \\
&= -\omega^2 f_1 \sin\omega t - \omega^2 f_2 \cos\omega t \\
&\quad + \gamma_0(\omega f_1 \cos\omega t - \omega f_2 \sin\omega t) \\
&\quad\quad + \omega_0^2 (f_1 \sin\omega t + f_2 \cos\omega t) \\
&= (-\omega^2 f_1 - \omega\gamma_0 f_2 + \omega_0^2 f_1)\sin\omega t + (-\omega^2 f_2 + \omega\gamma_0 f_1 + \omega_0^2 f_2)\cos\omega t \\
&= F_0 \sin\omega t.
\end{aligned}
$$

従って f_1, f_2 は

$$
\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\omega\gamma_0 \\ \omega\gamma_0 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.37}
$$

を満足する. (1.37) の解は,

$$
\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma_0^2} \begin{pmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2)F_0 \\ -\omega\gamma_0 F_0 \end{pmatrix}
$$

なので, (1.35) の一般解は

$$
x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma_0^2} \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2)\sin\omega t - \omega\gamma_0 \cos\omega t \right\} \tag{1.38}
$$

である. ここで c_1, c_2 は任意定数である.

例 3: 最後に（物理学の言葉で）「共鳴を起こす」型の微分方程式を取り扱う. これは, (1.32) で, 外力の振動数 ω と, バネの固有振動数 ω_0 が等しい場合である. (1.32) の一般解 (1.34) で, $\omega = \omega_0$ とおくと x_p は発散する. そこで, 先の特殊解 x_p の推定は破綻している. 物理的にはこのような場合には, 振動の振幅が時間ともに増大していく（つまり共鳴が起きている）. そこで, x_p として, ω_0 で振動し, 振幅が時間に比例する

$$
x_\mathrm{p} = f_1 t \sin\omega_0 t + f_2 t \cos\omega_0 t \tag{1.39}
$$

と推定してみよう. ここで, f_1, f_2 は定数である. 三角関数の振幅を定数ではなく係数変化法のように t の関数（ただし, t の 1 次関数）と推定している. これを (1.32) の式に代入すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x_\mathrm{p} &= 2\omega_0(f_1 \cos\omega_0 t - f_2 \sin\omega_0 t) - \omega_0^2(f_1 t \sin\omega_0 t + f_2 t \cos\omega_0 t) \\
&\quad + \omega_0^2(f_1 t \sin\omega_0 t + f_2 t \cos\omega_0 t) \\
&= F_0 \sin\omega_0 t.
\end{aligned}
$$

したがって, $f_1 = 0$, $f_2 = -f/(2\omega_0)$. つまり特殊解は

$$x_{\mathrm{p}} = -\frac{F_0 t}{2\omega_0} \cos \omega_0 t \tag{1.40}$$

となる. したがって, (1.32) で $\omega = \omega_0$ の場合の一般解は

$$x = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t - \frac{F_0 t}{2\omega_0} \cos \omega_0 t \tag{1.41}$$

となる. ここで, c_1, c_2 は任意定数である.

■補足 ：(1.39) では振幅を時間 t に比例すると推定して特殊解を求めた. 以下では通常の係数変化法を用いて特殊解を推定したときには, どのような計算になるのかここで示しておく. 特殊解は 1 個見つければいいという指針を積極的に使うことになる. 特殊解を

$$x_{\mathrm{p}} = f(t) \sin \omega_0 t + g(t) \cos \omega_0 t \tag{1.42}$$

と推定する. これを元の微分方程式に代入する:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0 x_{\mathrm{p}} &= \left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} - 2\omega_0 \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \right) \sin \omega_0 t + \left(\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega_0 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right) \cos \omega_0 t \\ &= F_0 \sin \omega_0 t. \end{aligned} \tag{1.43}$$

したがって

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} - 2\omega_0 \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = F_0, \tag{1.44a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega_0 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{1.44b}$$

が得られる. (1.44b) を (1.44a) に代入して f を消去すると,

$$\frac{\mathrm{d}^3 g}{\mathrm{d}t^3} + 4\omega_0^2 \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = -2\omega_0 F_0 \tag{1.45}$$

となる. 上式を t で積分すると

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + 4\omega_0^2 g = -2\omega_0 F_0 t + C \tag{1.46}$$

を得る. ここで C は任意定数である. この任意定数は $C = 0$ と選んでよい. なぜなら, 特殊解としては与式を満たすものを一つ見つければよいからである. したがって, (1.46) は

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + 4\omega_0^2 g = -2\omega_0 A t \tag{1.47}$$

となる．g の満たす方程式が再び非斉次微分方程式となった．この方程式の解は非斉次項が t の多項式なので，

$$g = at + b \tag{1.48}$$

と推定する．この時，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + 4\omega_0^2 g = 4\omega_0^2 at + 4\omega_0^2 b = -2\omega_0 F_0 t, \\
\therefore \quad & 4\omega_0^2 a = -2\omega_0 F_0, \qquad (1.49) \\
& 4\omega_0^2 b = 0, \qquad (1.50)
\end{aligned}$$

となる．以上より，

$$a = -\frac{F_0}{2\omega_0},\ b = 0$$

が得られ，最終的に求めるべき係数 g は

$$g = -\frac{F_0}{2\omega_0} t \tag{1.51}$$

である．(1.51) を (1.44b) に代入すると $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t = 0$ となり，$f = D$，ここで D は任意定数であるがこれは再び 0 としてよい．以上より特殊解として

$$x_{\mathrm{p}} = -\frac{F_0}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t \tag{1.52}$$

が再び得られた．

1.8 最後に...

“推定法” が成功するためには，与えられた微分方程式を眺めてどのような解が存在するのかをうまく推定してやらなければいけない．よい推定をしないと解は求まらない．それでは，よい推定をするにはどうしたらいいのであろうか？それはいたって簡単で，

> よい推定を行うには微分方程式を山ほど（もしくは星の数ほど）解いて
> **知識**と**経験**と**勘**を養うことである．

本稿で紹介した常微分方程式以外にも物理学で頻繁に登場するタイプの微分方程式があり，これらについては各自で微分方程式や物理数学の教科書を参照して勉強してほしい．

1.9 演習問題

1.9.1 1 階の微分方程式の問題

以下の 1 階の微分方程式の一般解を求めなさい.

i)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x.$$

ii)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy.$$

iii)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2x + xy^2}{2y + x^2y}.$$

1.9.2 定数係数を持った 2 階の線形常微分方程式の問題

以下の微分方程式の一般解を求めなさい.

i)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0.$$

ii)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 5x = 0.$$

iii)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 5x = 0.$$

iv)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 10\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 25x = 0.$$

v)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4x = 0.$$

vi)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 5x = t^2 + 2e^{3t}.$$

vii)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 10\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 25x = 20\cos 2t.$$

viii)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = f_0 \cos\omega t.$$

ここで，ω, f_0 は正の定数であるとする．

1.9.3　力学における非斉次型微分方程式の問題の一例

一様な重力場中で, 質量 m の質点が速度に比例する抵抗力を受けながら運動しているとする．この運動に関して以下の問いに答えなさい．

i) 重力加速度を g, 鉛直上向きの座標を y , 抵抗力の大きさを表す正値のパラメターを γ と表すとき, 質点の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -mg + (\quad ア \quad) \tag{1.53}$$

となる．空欄 (　ア　) に当てはまる数式を次の a)〜d) から一つ選びなさい．

a) $m\gamma\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$　　b) $-m\gamma\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$

c) $m\gamma\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$　　d) $-m\gamma\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$

ii) (1.53) は非斉次の微分方程式である．先ず, (1.53) の斉次微分方程式の一般解を求めなさい．

iii) 次に, (1.53) の特殊解を $y = D_1 t + D_2$ と推定することにより求めなさい．

iv) 以上より, (1.53) の一般解を求めない．

v) 前設問で求めた解から鉛直方向の速度 $v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ を求めなさい．

vi) $t \to \infty$　における速度（終端速度）を求めなさい．

vii) 前設問で求めた終端速度は微分方程式の形で書かれた運動方程式を数学的に解かなくても導くことができる．実際に運動方程式 (1.53) から力のバランスを考えることにより終端速度を求めなさい．

viii) (1.53) から力学的エネルギー（運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和）の発展方程式を導き, エネルギーが保存するか否かを議論しなさい．

1.9.4 発展問題

i) 次の連立微分方程式は, 大気の下層や海洋の表層の流れを記述する方程式で Ekman 方程式と呼ばれるものである:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} - v = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} + u = U_\infty.$$

ここで, U_∞ は定数である.

a) 上記の連立微分方程式の一般解を求めなさい.
<u>ヒント：</u>u もしくは v のみの 4 階の微分方程式に書き直して, "推定法" で解く. もしくは, 第 1 式と, 第 2 式に純虚数 i を掛けたものとを足し, $\hat{u} \equiv u + iv$ に関する 2 階の微分方程式に書き直して "推定法" で解く. なお, $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$ を用いなさい.[*23]

b) $z \to \infty$ で $u \to U_\infty$, $v \to 0$, $z = 0$ で $u = 0, v = 0$ という境界条件を満足する解を求めなさい. (各 z に対して u, v をプロットすると螺旋を描く. この螺旋は Ekman 螺旋と呼ばれる.)

[*23] Euler の関係式を用いると, $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$ が導ける. この式の証明も挑戦してみることを勧める.

第 2 章

ベクトルの掛け算 (2): 外積, 回転

前期開講の力学 I では, バネに繋がれた物体の振動や自由落下のような直線的な運動を主に考察してきた. 力学 II では, 先ず太陽の周りをまわる惑星の運動のような回転運動を扱っていく. そのために必要な数学的知識をこの章で解説する.

2.1 ベクトルの掛け算：外積

ベクトルとベクトルの足し算, 引き算, 掛け算（内積）は既に導入した. ここではさらに内積とは異なる別のベクトルどうしの掛け算を導入する. ベクトルどうしを掛けたときスカラー量になる掛け算が内積であったが, ここではベクトルどうしを掛けたときベクトル量になる掛け算（**外積**, もしくは**ベクトル積**とも呼ばれる）について解説する.

2.1.1 外積の定義

二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ があったとき, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積を

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \tag{2.1}$$

と書く.

■**注意**： $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の「×」を必ず忘れないで付けることが重要である. 例えば, 掛け算なので「×」の代わりに「·」と書くと別の意味（内積）になる. また, 何も記号を付けない場合には, どのような掛け算なのかが判別できない.

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ は次のように定義される: $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ はベクトルで, $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ の

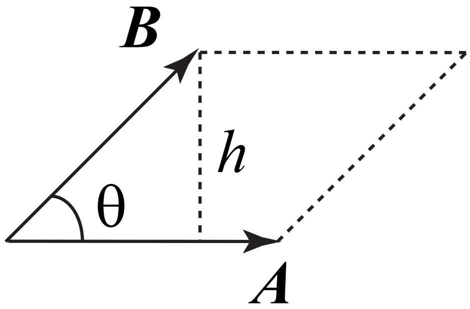

図 2.1　二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ で作られる平行四辺形. $\boldsymbol{B}$ ベクトルの終点から, $\boldsymbol{A}$ ベクトルに下ろした垂線の長さ h は, $h = B\sin\theta$ であることに注意. したがって, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ で作られる平行四辺形の面積 S は, 底辺 $\times$ 高さで, $S = AB\sin\theta$ となる. また, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ で作られる三角形面積 S は, 底辺 $\times$ 高さ $\times(1/2)$ で, $S = \frac{1}{2}AB\sin\theta$ となる.

向きに右ねじを回したときに, 右ねじの進む方向を向いていて,[*1] 大きさは $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を辺とする平行四辺形の面積

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| \equiv AB\sin\theta. \tag{2.2}$$

に等しい. ここで, θ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角度であり, $0 \le \theta \le \pi$ である（図 2.1 参照）.

外積の定義から, ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ で作られる三角形の面積 S は, 外積を用いれば

$$S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| \tag{2.3}$$

となることは容易に類推できるであろう.

2.1.2　外積の性質

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ がベクトル, p がスカラーのとき, 外積の定義から, 外積は次の性質を持つことがわかる:

i) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$: **外積では可換則は破れる!**
ii) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$: 分配則
iii) $p(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (p\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\times(p\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})p$: 分配則
iv) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0.$
v) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$

[*1] 別の言い方をすると, 右手を親指を立ててこぶしを握った時に, 親指を除く 4 本の指の付け根から指先に向かう方向の回転に対して, 親指が向く方向が右ねじを回したときに進む方向である.

vi) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ がデカルト座標系で次のように分解できるとき,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{B} &= B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積を成分を使って書き下すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}) \times (B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}),\\ &= A_xB_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} + A_xB_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} + A_xB_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}\\ &\quad + A_yB_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + A_yB_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} + A_yB_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\ &\quad + A_zB_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} + A_zB_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} + A_zB_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\,\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{2.4}$$

となる．行列式を使って表すと,

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{2.5}$$

である.

vii) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = 0$ であり, $A \neq 0,\ B \neq 0$ ならば, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は互いに平行である.

2.2 回転

2.2.1 復習と動機

あるベクトル $\boldsymbol{F}$ を, 始点 P から終点 Q まで, ある経路に沿って線積分したときに, その値は一般に P と Q における積分の値だけでなく経路の詳細にも依存することを以前学んだ（力学 I 講義ノート第 9 章 9.2 節参照）．ただし $\boldsymbol{F}$ があるスカラー関数 ϕ の勾配から導かれるとき, 即ち $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}\phi$ のときには, $\boldsymbol{F}$ の線積分の値は P と Q のみに依存し, 経路の詳細に依存しないことも学んだ.

これらの数学的な知識の物理学的もしくは力学的応用としては, 力 $\boldsymbol{F}$ をある経路に沿って積分することは $\boldsymbol{F}$ のした仕事を表し, 仕事が経路の詳細に依存せず経路の始点と終点のみで決まるとき, それはポテンシャル差（終点におけるポテンシャルの値と始点におけるポテンシャルの差）になることを見た（力学 I 講義ノート第 10 章参照）．ポテンシャルはエネルギー保存則と関連して力学における極めて重要な量である．ポテンシャルの勾配を計算することで, 物体に働く力を導くことができる.

ある力 $\boldsymbol{F}$ が与えられたときに, それがポテンシャルから導かれるか否かをいちいち線積分せずに調べる方法があればとても便利であろう. そのような方法は, 勾配演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ と外積を使うと作ることができる.

力学 I 講義ノート第 9 章 9.5 節で述べたように, 勾配演算子はベクトルのようなもので, スカラー関数 f に作用すると, $\boldsymbol{\nabla} f$ はベクトル量であった. このことから, あるベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{\nabla}$ との内積, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$, や $\boldsymbol{\nabla}$ と $\boldsymbol{A}$ との外積, $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$, が定義できそうである. 実際にそれは可能で, 前者の $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}$ の発散と呼ばれ, 後者の $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}$ の回転と呼ばれるものである. ここでは後者の回転についてのみ解説する.

2.2.2 定義

あるベクトル $\boldsymbol{A}$ の回転とは,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \tag{2.6}$$

であり, デカルト座標系の成分を使って表すには, (2.5) を参照すると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{2.7}$$

である.

2.2.3 ベクトル恒等式

あるスカラー関数 ϕ の勾配の回転は恒等的にゼロ

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\phi)=0 \tag{2.8}$$

であることが示せる. 実際に, デカルト座標系に分解して考えると, まず ϕ の勾配は

$$\boldsymbol{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{2.9}$$

であり, (2.9) の回転は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\phi) &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\boldsymbol{k}\\ &=0\end{aligned} \tag{2.10}$$

が得られる．(2.8) は（2 階微分可能な）任意のスカラー関数に対して成り立つ関係式で，恒等式である．*2

具体例：　力学 I の 9.5 節で $\boldsymbol{A} = (2xy+1)\boldsymbol{i} + (x^2+2y)\boldsymbol{j}$ の線積分は経路の詳細に依存せず，$\boldsymbol{A}$ はスカラー関数 $\phi = x^2y + x + y^2$ の勾配で与えられることを見た．実際に，$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ を計算してみると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}(x^2+2y)\right)\boldsymbol{i} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z}(2xy+1) - \frac{\partial}{\partial x}0\right)\boldsymbol{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+2y) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy+1)\right)\boldsymbol{k} \\ &= (2x-2x)\boldsymbol{k} = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

である．

つまり，力学の問題で力 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャルから導かれるか否かは，力 $\boldsymbol{F}$ の回転 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$ を計算すれば判定できる．$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ ならば，$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$ なるポテンシャル U が存在するのである．

2.2.4　物理的意味

$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ の物理的意味は，水や空気の流れをイメージすると理解しやすい．$\boldsymbol{A}$ を水や空気の速度とする．このとき，流れの中に水車または風車を置いたときに，水車や風車が回転しない場合は，$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ であり，回転する場合には $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ はゼロではない．$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ のベクトルの向きは水車や風車の回転軸の方向を向く．$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ の大きさは水車や風車の回転角速度（の 2 倍）に等しい．例えば，$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ のベクトルの向きが z 方向を向いている場合，z 軸の正の側からみて水車や風車が時計周りに回転をしている場合には，$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ の z 成分は負であり，反時計回転をしている場合には，$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ の z 成分は正である．

具体例：　x 軸方向に流れる水の流速 $\boldsymbol{A} = ay\boldsymbol{i}$ を考える（図 2.2 参照）．ここで a は定数で，もし $a > 0$ ならば，流速は y 軸の正の方向に向かって速くなる．一方，$a < 0$ ならば，流速は y 軸の正の方向に向かって遅くなる．もしこの流れの中に z 軸を回転軸とする水車を入れたときに，z 軸の正の方向から見て水車は $a > 0$ のときには時計回りに回転し，$a < 0$ のときには反時計回りに回転するだろう．$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ を具体

*2 $\boldsymbol{\nabla}$ を含んだ恒等式は，しばしばベクトル恒等式とも呼ばれる．ベクトル恒等式は (2.8) が唯一ではなく，他にも存在する．

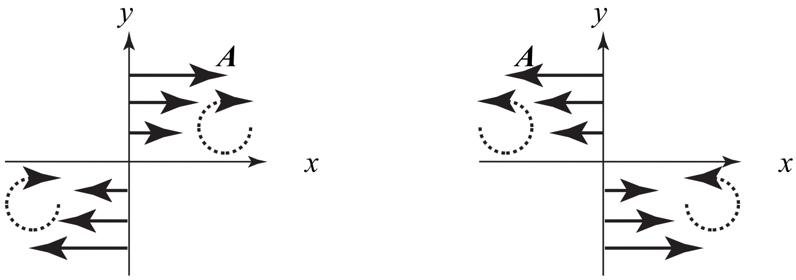

図 2.2　xy 平面内を x 軸方向に流れる流速 $\boldsymbol{A} = ay\boldsymbol{i}$ (実線太矢印) とその流れの中に置かれた z 軸（紙面に垂直方向）を回転軸とする水車の回転方向 (点線矢印). 左図: $a > 0$ の場合. 右図: $a < 0$ の場合.

的に計算すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}0\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(ay) - \frac{\partial}{\partial x}0\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial y}(ay)\right)\boldsymbol{k} \\ &= -a\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{2.12}$$

である. 確かに, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ は z 方向成分を持ち, その成分は $a > 0$ のときには負, $a > 0$ のときには正である. ちなみに $a = 0$ ならば水車は回転しないと想像されるが, 実際に $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ である.

上の例から $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A}$ の**回転**と呼ばれる理由がわかるであろう.

2.3 演習問題

2.3.1 外積に関する問題

i) $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ のとき, 外積の計算公式

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

を使用して具体的に計算することにより, 以下の設問に答えなさい.

a) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0$ を示しなさい.

b) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めなさい.

c) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ を示しなさい.

ii) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{C} = 4\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ のとき, 以下の設問に答えなさい.

a) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めなさい.

b) $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}$ を求めなさい.

c) $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ を求めなさい.[*3]

iii) xy 平面内において, 点 O $(0, 0)$, 点 P $(3, 0)$, 点 Q $(3, 4)$ を頂点とする三角形 OPQ を考える.

a) 三角形 OPQ を図示し, この三角形の面積を素朴な公式[*4]に従って求めなさい.

b) O を始点を P を終点とするベクトルを $\boldsymbol{A}$, O を始点を Q を終点とするベクトルを $\boldsymbol{B}$ とする. $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を求めなさい. (デカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ を使った分解の形で表現する.)

c) $\frac{1}{2}|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$ を求め, a) で求めた面積と比較しなさい.

2.3.2 回転に関する問題

xy 平面内の同心円状の等値線で表現されるスカラー場[*5]

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 \tag{2.14}$$

に関して以下の設問に答えなさい.

i) $\boldsymbol{\nabla}\phi$ を求めなさい.[*6]

---

*3 一般に, $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ であることが b) と c) を比較するとわかります.

*4 (底辺)×(高さ)×$\frac{1}{2}$.

*5 ϕ の値が, 1, 2, 3 となるところを線で結ぶと, それぞれ半径 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ の円になる.

*6 これは, 原点のほうを向くベクトル（放射状のベクトル）である.

ii) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\phi)$ を求めなさい.[*7]

[*7] $\boldsymbol{\nabla}\phi$ が原点のほうを向くベクトルなので, このような流速を持つ流れの中に z 軸を回転軸に持つ水車を入れても, 水車は回転しないであろうことは想像できるであろう.

第 3 章

回転運動の基礎

前章に導入した外積という数学的道具と運動方程式を使って, 本章では回転運動を扱う際に便利な形に運動方程式を書き直すことを行う. さらにそれから導かれる結果について考察する.

3.1　Newton の運動の法則の復習

回転を伴う運動でも, 質点の運動は Newton の運動の法則に従う. Newton の運動の第 2 法則, 運動方程式, は (質量) × (加速度) = (物体に働いている力) であり, 微分方程式の形で

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \tag{3.1}$$

と書いて, これまでの様々な章で質点の運動を取り扱ってきた. しかしながら, (3.1) はより一般的に, もしくは, Newton がそもそも書き下した第 2 法則は,

一般的な形の運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{3.2}$$

であった. ここで,

運動量の定義

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &\equiv m\boldsymbol{v} \\ &= m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{3.3}$$

である．$\boldsymbol{p}$ は運動量と呼ばれ，運動の勢いや衝突の際の衝撃の強さを表す量である．(3.3) を (3.2) に代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \end{aligned}$$

となり，上式は質量が変化しない場合 ($\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$) に (3.1) に帰着されることがわかる．[*1]

$\boldsymbol{F} = 0$，つまり物体に力が働いていない，もしくはいくつかの力が働いてるが，その合力がゼロである場合には，(3.2) の運動方程式は

運動量保存則

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3.4}$$

となる．この場合，運動量は時間に依存しないことを示している．これは運動量保存則と呼ばれる．E を力学的エネルギーとすると，力がポテンシャルから導かれる場合には，運動方程式からエネルギー保存則 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$ が導かれることを力学 I で議論した．このように，物理学では状況に応じて様々な保存則が現れる．

3.2 角運動量の発展方程式

(3.2) を議論の出発点にして回転運動に適した方程式を導く．

3.2.1 導出

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と運動方程式 (3.2) との外積を作る:

$$\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \tag{3.5}$$

[*1] (3.2) は例えば燃料を消費しながら飛行するため，質量が減るロケットのような運動を扱う際に有効である．

上式の左辺は次のように変形できる:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} \\
&= \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})}{\mathrm{d}t}, \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

ここで, $\boldsymbol{p}$ は定義により $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ と平行であるので, 両者の外積はゼロ, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times (m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}) = 0$, であることを用いた．したがって, (3.5) は

角運動量の発展方程式

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}, \qquad (3.7\mathrm{a})
$$

$$
\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \qquad (3.7\mathrm{b})
$$

$$
\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}, \qquad (3.7\mathrm{c})
$$

と書ける．ここで, $\boldsymbol{l}$ は角運動量, $\boldsymbol{N}$ は力のモーメントもしくはトルク, と呼ばれる．

3.2.2　物理的意味

(3.7) が物体の回転運動を記述する方程式であることを示す．いま, $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{r}$ に平行な方向 $\boldsymbol{p}_{\shortparallel}$ と $\boldsymbol{r}$ に垂直な方向 $\boldsymbol{p}_{\perp}$ とに分解すると (図 3.1),

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{l} &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \\
&= \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{p}_{\shortparallel} + \boldsymbol{p}_{\perp}) \\
&= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_{\shortparallel} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_{\perp} \\
&= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_{\perp}
\end{aligned}
$$

となる．ここで, $\boldsymbol{p}_{\shortparallel}$ の定義から, $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_{\shortparallel} = 0$ を用いた．つまり, 角運動量 $\boldsymbol{l}$ には運動量の $\boldsymbol{r}$ に平行な方向 $\boldsymbol{p}_{\shortparallel}$ は寄与せず, $\boldsymbol{p}_{\perp}$ しか寄与しない．この $\boldsymbol{p}_{\perp}$ は $\boldsymbol{r}$ の始点を中心とした $\boldsymbol{p}$ の回転方向と解釈できる (図 3.1 参照)．つまり, 角運動量とは回転運動に伴う『運動量』と解釈できる.[*2]．同様に力 $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{r}$ に平行な方向 $\boldsymbol{F}_{\shortparallel}$ と $\boldsymbol{r}$ に垂直な方向 $\boldsymbol{F}_{\perp}$ とに分解すると,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F}_{\shortparallel} + \boldsymbol{F}_{\perp}) \\
&= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_{\shortparallel} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_{\perp} \\
&= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_{\perp}
\end{aligned}
$$

[*2] 運動量とは書かず, 『運動量』と書いたのは, 角運動量の次元は運動量とは異なる次元を持つからである．運動量の次元は (質量)×(速さ) で, ML/T であり, 角運動量の次元は (運動量)×(長さ) で, ML^2/T である．

となり, トルクには力 $\boldsymbol{F}$ のうち, $\boldsymbol{r}$ の始点を中心とした回転方向の $\boldsymbol{F}_\perp$ しか寄与しないのである．つまり, トルクとは回転運動を生じさせる『力』と解釈できる.[*3]

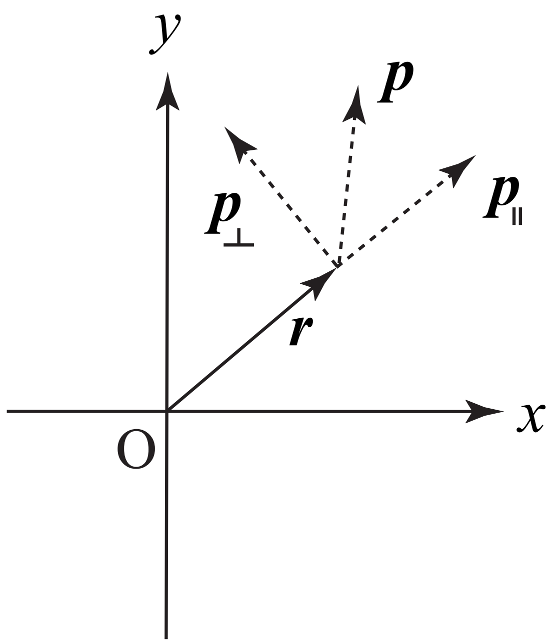

図 3.1　位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ にある物体が運動している状況を考える．瞬間的な運動の方向は運動量 $\boldsymbol{p}$ で表されている．$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{r}$ に平行な方向 $\boldsymbol{p}_\parallel$ と, $\boldsymbol{r}$ に垂直な方向 $\boldsymbol{p}_\perp$ とに分解する．$\boldsymbol{p}_\parallel$ と, $\boldsymbol{p}_\perp$ はそれぞれ, $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{r}$ の始点 (原点 O) からみて O に近づいたり遠ざかったるする方向と, それを O を中心とした半径 $|\boldsymbol{r}|$ の回転する方向とに分解したものと見なせる.

回転運動の運動方程式 (3.7a) は, 角運動量の時間変化率はトルクに等しい, というステートメントである．これは, (3.2) の, 運動量の時間変化率は力に等しい, というステートメントと対比される (表 3.1).

表 3.1　一般の運動もしくは並進運動を記述する物理量や支配方程式と回転運動を記述する物理量や支配方程式の対比.

一般的 (もしくは並進) 運動	$\leftrightarrow$	回転運動
運動量: $\boldsymbol{p}$	$\leftrightarrow$	角運動量: $\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
力: $\boldsymbol{F}$	$\leftrightarrow$	トルク（力のモーメント）: $\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
支配方程式:$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$	$\leftrightarrow$	支配方程式: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}$

[*3] 力とは書かず,『力』と書いたのは, トルクの次元は力とは異なる次元を持つからである．定義によりトルクの次元は (力)×(長さ) で, $\mathrm{ML}^2/\mathrm{T}^2$ である.

3.2.3　保存則

もし, $\boldsymbol{N}=0$ のとき (3.7a) は

角運動量保存則

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{3.8}$$

となる．これは角運動量保存を表している．これは (3.4) の回転運動に対応するものである．

$\boldsymbol{N}=0$ となるのは $\boldsymbol{F}=0$ のときと $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{\parallel}$ のときである．前者は自明であまり面白くない場合である．後者のように位置ベクトルの方向だけに向いた力は, 中心力 と呼ばれる．即ち, 中心力が働くとき, 質点の角運動量は保存される．中心力の代表的な例は万有引力である．万有引力, および万有引力が働く場合の質点の運動は次章で扱う．

3.3 演習問題

i) 質量 m を持つ質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, 速度を $\boldsymbol{v}$ としたとき, この質点の角運動量 $\boldsymbol{l}$ を, m, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ を用いて表現しなさい.

ii) 角運動量の時間発展方程式は $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ と書ける．ここで, $\boldsymbol{F}$ は力である．$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ は何と呼ばれる物理量か答えなさい．さらに, この物理量の意味について述べなさい.

iii) 前設問から角運動量が保存する場合はどのような場合かを説明しなさい.

iv) デカルト座標系の xy 平面内において一定の半径 a を保ちながら一定の角速度 Ω で座標系の原点の周りを回転運動する質量 m の質点を考える．即ち, ある瞬間 t における質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) &= x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} \\ &= a\left\{\cos(\Omega t)\,\boldsymbol{i} + \sin(\Omega t)\,\boldsymbol{j}\right\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

で与えられるとする．このとき, 以下の問いに答えなさい．なお, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ はそれぞれデカルト座標系の x, y 方向の単位ベクトルである.

a) この物体の速度 $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ と速さ $|\boldsymbol{v}|$ を求めなさい.（【注意】ベクトル $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j}$ の大きさ $|\boldsymbol{A}|$ は $\boldsymbol{A} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ である.）

b) この物体の角運動量を求めなさい.

c) 角運動量の大きさは, 回転半径と運動量の大きさとの積に等しいことを示しなさい.

第 4 章

中心力場中の質点の運動：惑星の運動

本章では, 前章の最後に触れた中心力に関連した話題, 中心力が働く場合の質点の運動, を考えてみる. 太陽の周りをまわる地球や惑星の運動が, 中心力場中の質点の運動のよい例である. 惑星の運動に関しては Kepler の法則と呼ばれる三つの法則が知られている. 中心力場中の質点の運動を運動方程式を用いて調べることにより, Kepler の法則が導出できることを示す.

4.1　Newton の万有引力の法則

質点 1 と質点 2 がそれぞれ質量 m_1, m_2 を持ち, 距離 r 離れて存在しているとき, 各々の質点には次の式で表される力（万有引力）$\boldsymbol{F}$ が働く:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{4.1}$$

ここで, 質点 1 に働く力の場合, $\boldsymbol{e}_r$ は質点 2 から質点 1 に向かう方向の単位ベクトルであり, 逆に, 質点 2 に働く力の場合, $\boldsymbol{e}_r$ は質点 1 から質点 2 に向かう方向の単位ベクトルである. (4.1) の負符号と $\boldsymbol{e}_r$ は二つの質点が互いに引き合う力, 引力, を及ぼしあうことを示しており, (4.1) は Newton の万有引力の法則と呼ばれている. G は万有引力定数と呼ばれており, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ の大きさを持つ. 万有引力は中心力の一つである.

4.2　万有引力場中の質点の運動

万有引力が働く場合の質点の運動を考察しよう．これは太陽と惑星を質点とみなしたときの, 太陽の周りをまわる惑星の運動に相当する．ここでは解いている問題が具体的にイメージしやすように, 質量 M の質点を太陽とみなし, 質量 m の質点を惑星（地球）とする．太陽系には太陽と考察の対象としている惑星以外には天体は存在しないとする．つまり, 質量 M と m の二つの質点の 2 体問題と考える．さらに太陽が動かないとして, 太陽に座標の原点を取る．

4.2.1　運動方程式

太陽の周りを公転する惑星の運動を記述する運動方程式はベクトル形式で

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{4.2}$$

である．

(4.2) を具体的に解くために問題に適した座標系を張る．惑星の運動は太陽の周りをまわる周回運動であることが知られているので, デカルト座標系よりも極座標系で記述するほうが便利であることが想像できる．そこで, 太陽と惑星を含む平面（黄道面）内に 2 次元極座標系 (r, θ) を張り, この座標系を用いて運動を考察する．

単振り子の運動を考察する際に既に議論したように[*1], 2 次元極座標系ではその単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ が時間に依存して方向を変える．即ちこれらの単位ベクトルの時間微分はゼロではないことに注意する必要がある．念のため単位ベクトルの時間微分を再掲しておく:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta, \tag{4.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r. \tag{4.4}$$

これらを踏まえると, 位置ベクトルの時間微分（速度）は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta \\ &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{e}_r) \\ &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta, \end{aligned} \tag{4.5}$$

[*1] 力学 I 第 8 章参照.

位置ベクトルの時間による 2 階微分（加速度）は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta \\ &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta\right) \\ &= \left\{\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\boldsymbol{e}_r + \left\{r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right\}\boldsymbol{e}_\theta \qquad (4.6)\end{aligned}$$

である.

以上より, 運動方程式 (4.2) を 2 次元極座標の成分に分解するとその動径方向, 方位角方向成分はそれぞれ以下の様になる:

$$m\left\{\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = -\frac{GMm}{r^2}, \qquad (4.7)$$

$$m\left\{r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right\} = 0. \qquad (4.8)$$

4.2.2　角運動量保存則

前節で導いた運動方程式のうち方位角方向成分の式 (4.8) が角運動量保存則である. 実際にそのことを示す. 角運動量は定義により $\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v})$ であるが, 2 次元極座標では (4.5) を用いると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l} &= r\boldsymbol{e}_r \times m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta\right) \\ &= mr^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta\right) \qquad (4.9)\end{aligned}$$

である. ここで $\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_r = 0$ を用いた. $(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta)$ は 2 次元極座標平面に垂直な単位ベクトルで, それは時間変化しないから, 角運動量保存則 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = 0$ は極座標を用いたベクトル形式で

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\left(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta\right)\right\} \\ &= m\left\{2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right\}\left(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta\right) \\ &= 0. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

(4.10) の成分を取り出すと

$$mr\left\{r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right\} = 0,$$

となる. r は一般的にゼロでないので, 上式を r で割り,

$$m\left\{r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right\}=0,$$

を得る. これは (4.8) である. 即ち, (4.8) が角運動量保存則であることが示せた.

今の問題では質量も時間変化しないので, 角運動量を質量で割った $r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ も時間に依存しない定数であり, これを以下では h と表すことにする. 即ち,

$$h\equiv r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \tag{4.11}$$

あとで見るように, この h は Kepler の第 2 法則に関係する量である.

4.2.3　運動方程式の解: 軌道

運動方程式の動径方向成分の式 (4.7) を解くことを考える. この方程式は未知変数 r と θ の 2 つ未知変数を含むので一見難しそうな方程式であるが, (4.11) を使うと θ を消去することができる:

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-\frac{h^2}{r^3}=-\frac{GM}{r^2}. \tag{4.12}$$

この微分方程式はこれまで扱ってきた微分方程式とは形が異なる. しかしながら独立変数を t から θ に, さらに未知変数を $u\equiv 1/r$ と変換すると, その結果得られる微分方程式は, 定数係数 2 階線形常微分方程式の非斉次型になる. 実際に,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\\&=hu^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}, &(4.13)\\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}&=hu^2\frac{\mathrm{d}u^{-1}}{\mathrm{d}\theta}\\&=-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}, &(4.14)\\ \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}&=hu^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)\\&=-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}, &(4.15)\end{aligned}$$

であるから, (4.7) は

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2} \tag{4.16}$$

と変換される. (4.16) は定数係数 2 階線形常微分方程式の非斉次型である.

(4.16) の斉次型微分方程式の一般解はいくつかの表現の仕方がある:

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{i\theta} + C_2 e^{-i\theta} \\ &= A\sin\theta + B\cos\theta \\ &= C\cos(\theta - \theta_0). \end{aligned} \tag{4.17}$$

ここで, C_1, C_2, A, B, C, θ_0 は全て任意定数である. 以下では 3 番目の表現を用いることにする.

(4.16) は $u = \frac{GM}{h^2}$ という特殊解をもつことから, 以上より (4.16) の一般解は

$$u = C\cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{h^2} \tag{4.18}$$

である. u を r に戻して整理すると

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \frac{Ch^2}{GM}\cos(\theta - \theta_0)}.$$

さらに, 角度 θ の基準を変えて $\theta - \theta_0$ を改めて θ とおくと最終的に

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \frac{Ch^2}{GM}\cos\theta}. \tag{4.19}$$

が得られる. (4.19) は 2 次元極座標系の変数 r と θ 間の関係なので, 中心力場中を運動する質点の軌道（惑星の軌道）を与える式である. 任意定数 C は初期条件によって決定される.

(4.19) は一般に円錐曲線[*2]と呼ばれるもので, これには楕円, 放物線, 双曲線が含まれる. (4.19) は一見これらの曲線の式には見えない. この点についてはのちに議論する. ともかく運動方程式を解いて, 惑星の軌道が求められた.

4.3　エネルギー論

中心力場はポテンシャルの勾配の形で書けるかどうかを調べ, もしそのように書けるならばエネルギー保存則を導いてみる. さらに軌道の式に現れた任意定数 C と全エネルギーの関係式を導いてみる. C は初期条件で決定されるが, もし全エネルギーが保存するならば, 全エネルギーは初期条件の値から時間発展の間中変わらないので, 任意定数 C を全エネルギーで表すことができるはずだからである.

[*2] 円錐を様々な角度で平面を用いて切った時にできる, 平面と円錐との交線

4.3.1　ポテンシャルの存在

力 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャルから導かれるならば, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ を満足しなければならない．実際に計算をしてみる．回転の計算にはデカルト座標系を使うほうが以前の章（2 章）で導入した回転の公式がそのまま適用できるので計算しやすいであろう．そこで，ここでは 2 次元デカルト座標系で計算する．[*3] ここで, r 方向の単位ベクトルをデカルト座標系で表現すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_r &= \frac{\boldsymbol{r}}{r} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\end{aligned}$$

であることに注意する．したがって,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \left(-\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r\right) &= -GMm\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \\ &= -GMm\boldsymbol{\nabla} \times \left\{\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\right\}\end{aligned}$$

を計算すればよい．$-GMm$ の係数は除くと,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left\{\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\right\}\boldsymbol{k} \tag{4.20}$$

を計算する．ここで,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} = -\frac{3xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5} \tag{4.21}$$

である．(4.20) の右辺の中括弧内の第 2 項は, (4.21) において x と y を入れ替えればよいので

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} = -\frac{3xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5}$$

[*3] もちろん 2 次元極座標のまま計算することもできる．

である．以上から，$\boldsymbol{F}$ を万有引力とすると，$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ であり，万有引力はあるポテンシャル U から導かれる，即ち，

$$-\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r = -\boldsymbol{\nabla}U \tag{4.22}$$

となる U が存在することがわかる．

4.3.2　エネルギー保存則

前章の結果を受けて，運動方程式 (4.2) からエネルギー保存則を導いてみる．運動方程式からエネルギー保存則を導くには二つの方法がある．運動方程式を或る場所から別の場所まで経路に沿って線積分する，または，運動方程式と速度との内積を行う，ことの二つである．ここでは後者の方法でエネルギー保存則を導く．

(4.2) と速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ との内積を行うと，

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \tag{4.23}$$

ここで左辺を変形すると

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(v_r^2+v_\theta^2\right)\right\}, \end{aligned} \tag{4.24}$$

右辺は

$$\begin{aligned} -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta\right) \\ &= -\frac{GMm}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{GMm}{r}\right) \end{aligned} \tag{4.25}$$

と変形できる．ここで (4.5) を用いた．以上より，(4.23) は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(v_r^2+v_\theta^2\right) - \frac{GMm}{r}\right\} = 0 \tag{4.26}$$

となる．

$$E \equiv \frac{1}{2}m\left(v_r^2+v_\theta^2\right) - \frac{GMm}{r} \tag{4.27}$$

がこの系の全エネルギーであり, (4.26) はエネルギー保存則を表している.

$$U = -\frac{GMm}{r} \tag{4.28}$$

が万有引力のポテンシャルである．なお, ポテンシャルの基準は $r \to \infty$ にとっている.[*4]

4.3.3　軌道の式への再訪

軌道の式 (4.19) に現れた任意定数 C を全エネルギー E と関係づける．(4.27) に (4.5), (4.11), および (4.14) を用いると

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} - \frac{GMm}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\left\{h^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + h^2u^2\right\} - GMmu \end{aligned} \tag{4.29}$$

と変形される．これに, (4.18) を代入する:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\left[C^2h^2\sin^2(\theta-\theta_0) + h^2\left\{\frac{GM}{h^2} + C\cos(\theta-\theta_0)\right\}^2\right] \\ &\quad -GMm\left\{\frac{GM}{h^2} + C\cos(\theta-\theta_0)\right\} \\ &= \frac{1}{2}mC^2h^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{GM}{h}\right)^2 m. \end{aligned}$$

以上より, 任意定数 C は全エネルギーを使って

$$C = \pm\sqrt{\frac{2E}{mh^2} + \left(\frac{GM}{h^2}\right)^2} \tag{4.30}$$

と表せることがわかる.

4.4　Kepler の法則

以上の結果をもとに Kepler（ケプラー）の法則を導いてみる．Kepler の法則とは, ドイツの天文学者 Kepler[*5]がオランダの天文学者 Tycho Brahe(ティコ・ブラーエ)[*6]の残し

[*4] $r \to \infty$ のとき, $U \to 0$.
[*5] 1571 年〜1630 年
[*6] 1546 年〜1601 年

た惑星の運動に関する観測データを解析する中で発見した法則であり, 次の三つにまとめられている：

Kepler の法則

- 第 1 法則：惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を運動する.
- 第 2 法則：惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間当たりに掃く面積は一定である (面積速度一定の法則).
- 第 3 法則：惑星の公転周期の 2 乗は, 軌道長半径の 3 乗に比例する.

4.4.1 Kepler の第 1 法則

軌道の式 (4.19) が楕円を表すことを示す. 長半径 a, 短半径 b で中心が座標軸の原点にあり, 長半径が x 軸上にある楕円の標準形は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4.31}$$

である. 焦点の位置は離心率を ε とすると, $(\pm\varepsilon a,0)$ の位置にある. ここで $0\le\varepsilon<1$ である. 離心率, 長半径, 短半径の間の関係は, 楕円の定義に戻ると得られる. 二つの焦点からの距離の和が一定である点の集合が楕円の定義である. 楕円の x 軸との交点と焦点との距離の和は $(a-\varepsilon a)+(a+\varepsilon a)=2a$ である. 一方, 楕円と y 軸との交点と焦点との距離の和は $2\sqrt{\varepsilon^2a^2+b^2}$ である. これらを等値すると, 離心率, 長半径, 短半径の間の関係,

$$b=\sqrt{(1-\varepsilon^2)}a \tag{4.32}$$

が得られる.[*7] (4.19) における r は焦点から楕円上の点までの長さであるので, (4.31) における, (x, y) と (r, θ) との関係は

$$x = \varepsilon a + r\cos\theta, \tag{4.33}$$
$$y = r\sin\theta, \tag{4.34}$$

である．これらを (4.31) に代入し (4.32) を用いる:

$$\frac{(\varepsilon a + r\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\theta}{(1-\varepsilon^2)a^2} = 1.$$

上式を整理すると r に関する次の 2 次方程式を得る:

$$(1-\varepsilon^2\cos^2\theta)r^2 + 2\varepsilon(1-\varepsilon^2)a\cos\theta\, r - (1-\varepsilon^2)^2a^2 = 0. \tag{4.35}$$

2 次方程式の解の公式を用いて, (4.35) の二つの解,

$$r_+ = \frac{(1-\varepsilon^2)a}{1+\varepsilon\cos\theta}, \tag{4.36}$$
$$r_- = -\frac{(1-\varepsilon^2)a}{1-\varepsilon\cos\theta}, \tag{4.37}$$

を得る．(4.36) で与えられる r_+ はまさに (4.19) と同じ形である．即ち, (4.19) は楕円の式であることがわかり, 万有引力の作用のもとで運動する惑星の軌道は楕円であるという Kepler の第 1 法則が確かめられた．なお, r_- の解は負値であり, 一方 r は距離であるので正値である．従って r_- の解は不適切である.

なお, (4.19) と (4.36) を比較し, さらに (4.30) を用いると, 離心率 ε は

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{Ch^2}{GM} \\ &= \left\{1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{h}{GM}\right)^2\right\}^{1/2}\end{aligned} \tag{4.38}$$

[*7] 楕円の標準形の式 (4.31) は, 楕円の定義から次のようにして得られる．楕円の焦点の位置を $(\pm\varepsilon a, 0)$, 長半径を a とすると, 2 つの焦点からの距離の和は, $(a-\varepsilon a)+(a+\varepsilon a)=2a$ である．一方, 2 つの焦点からの距離の和が $2a$ となる点 (x, y) は, $\sqrt{(x-\varepsilon a)^2+y^2}+\sqrt{(x+\varepsilon a)^2+y^2}=2a$ である．この式を

$$\sqrt{(x-\varepsilon a)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+\varepsilon a)^2+y^2}$$

と変形し, 両辺を二乗して整理すると

$$\sqrt{(x+\varepsilon a)^2+y^2} = a + \varepsilon x$$

を得る．さらに上式の両辺を二乗して整理すると,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-\varepsilon^2)a^2} = 1$$

を得る．$x=0$ における楕円上の点を $y=\pm b$ とすると上式から (4.32) が得られる．上式に (4.32) を代入すると楕円の標準形の式 (4.31) が得られる.

と表せる．離心率は $0 \leq \varepsilon < 1$ であるので, 少なくとも $E \leq 0$ でなければならない．このことは惑星の運動が楕円軌道になるためには, 運動エネルギー $T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$ よりもポテンシャル $U = -\frac{GMm}{r}$ の絶対値のほうが大きくなければならないことを示している．これは惑星が太陽の作る重力ポテンシャルに束縛されていることを示している．

E の下限は (4.30) の根号の中がゼロの場合である．一方, $E \geq 0$ のときには軌道 (4.19) は楕円ではなく, 双極線や放物線を表すことになる．太陽に一度きりしか接近しない彗星の軌道がこの解にあたる．(4.19) が双曲線や放物線を表していることを示すには, さらなる議論が必要なため, この点はここでは触れない.

4.4.2 Kepler の第 2 法則

Kepler の第 2 法則は角運動量保存則の言いかえである．外積の定義を思い出すと, ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の大きさは, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ が作る平行四辺形の面積であった．そこで, 角運動量 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v})$ を質量で割ったベクトルの大きさ $\frac{|\boldsymbol{l}|}{m} = r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = h$[*8]は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ が作る平行四辺形の面積である．ここで, $\boldsymbol{v}$ は単位時間に惑星が動く距離であることから, h は惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に掃く面積の 2 倍にあたる．つまり角運動量を惑星の質量の 2 倍で割ったものの大きさが面積速度である．したがって, 角運動量保存則, 角運動量が時間に因らず一定, は面積速度一定と本質的に同じことを言い表している.

[*8] (4.9) および (4.11) 参照

4.4.3　Kepler の第 3 法則

長半径 a, 短半径 b の楕円の面積は πab である.*9 この面積を前小節で求めた面積速度 $h/2$ で掃くために必要な時間が, 惑星の公転軌道 P である. 即ち,

$$P = \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi ab}{h} \tag{4.41}$$

ここで, (4.32) を用いて短半径 b を長半径 a で表す. さらに, (4.19) と (4.36) から

$$(1-\varepsilon^2)a = \frac{h^2}{GM} \tag{4.42}$$

の関係が導けるので, これらを (4.41) に代入する:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{h} \\ &= \frac{2\pi a^2 h}{h\sqrt{GMa}} \\ &= \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}. \end{aligned}$$

従って,

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{4.43}$$

を得る. つまり, 太陽系の各惑星に対して P^2/a^3 は同じ値であることがわかる.*10

---

*9 楕円の面積 I を求めてみる. 楕円の標準形の式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ より, $y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ が導ける. + 符号の式を x に関して $x=-a$ から a まで積分したもの

$$\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x \tag{4.39}$$

は, 楕円の面積の半分になることから, $x=a\sin\theta$ の変数変換を行うことにより,

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} &= ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= ab\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi ab}{2}, \end{aligned} \tag{4.40}$$

即ち, $I=\pi ab$ を得る.

*10 $4\pi^2/GM$ は万有引力定数と太陽の質量にのみ依存する. これらは太陽系内では同じ値である.

4.5　演習問題

万有引力の作用のもとで, ある平面内を運動する質量 m の小物体を考察する．座標系の原点には m に比べて十分に大きな質量 M をもつ物体が静止しているとする．このとき小物体に働く万有引力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r, \tag{4.44}$$

で与えられる．ここで, r は原点から小物体までの距離であり, $\boldsymbol{e}_r$ は 2 次元極座標系の動径方向の単位ベクトル, G は万有引力定数である．このとき, 以下の問いに答えなさい.

i) この小物体の運動方程式をベクトル形式で書きなさい.

ii) 以下では, 小物体の運動を 2 次元極座標系で考察する．2 次元極座標系における位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$, と書かれること, また, 2 次元極座標系の動径方向および, 方位角方向の単位ベクトル, $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, は時間の関数であることに注意し, 速度 $\boldsymbol{v}$ および加速度 $\boldsymbol{a}$ の 2 次元極座標における分解がそれぞれ

$$\boldsymbol{v}= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta, \tag{4.45}$$

$$\boldsymbol{a}= \left\{\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\boldsymbol{e}_r + \left\{2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right\}\boldsymbol{e}_\theta, \tag{4.46}$$

となることを示しなさい．必要であれば, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r$ を用いてよい.

iii) 以上の考察から, 運動方程式の動径方向成分と方位角方向成分をそれぞれ書きなさい.

iv) この小物体の角運動量を求めなさい.

v) 方位角方向の運動方程式を角運動量の観点から考察しなさい．必要なら $\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_z$ を用いなさい．ここで, $\boldsymbol{e}_z$ は小物体が運動する平面に垂直な単位ベクトルである.

vi) (4.44) がポテンシャル

$$U = -\frac{GMm}{r} \tag{4.47}$$

から導かれることを示しなさい．必要であれば, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\boldsymbol{e}_r = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j}$ を用いなさい.

vii) ベクトル形式の運動方程式から, 力学的エネルギー保存則,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - \frac{GMm}{r}\right) = 0, \tag{4.48}$$

を導きなさい.

viii) 小物体の運動が半径 a の円軌道 $(r = a)$ であると仮定する.

a) このとき, 動径方向の運動方程式は

$$ma\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{GMm}{a^2} = 0 \tag{4.49}$$

となることを示しなさい. また, この式は 2 つの力の和がゼロ, 即ち, 2 つの力がバランス示している. この 2 つの力について答えなさい.

ヒント： 方位角方向の速度成分 v_θ は (4.45) より, $v_\theta = a\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ である. v_θ を用いると (4.49) は

$$\left(m\frac{v_\theta^2}{a} - \frac{GMm}{a^2}\right)\boldsymbol{e}_r = 0$$

と書ける. 上式の左辺第 1 項は $v_\theta > 0$ (反時計回りの回転) であっても, $v_\theta < 0$ (時計回りの回転) であっても常に, 動径外向きに力が働くこと, さらにその力は円運動の半径に逆比例することを示している.

b) 小物体が半径 a の円軌道を一周する時間を T とする. T を角速度 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ で表しなさい.

c) 動径方向の運動方程式を T を含む形に変形し, Kepler の第 3 法則が成り立つことを示しなさい.

第 5 章

運動する座標系から見た物体の運動

これまでの章では特に座標系というものを意識せずに, もしくは明確に定義することなく, 物体の運動を扱ってきた．しかしながら, 力学の基本法則, Newton の運動の法則は慣性系と呼ばれる座標系に対して成り立つ物理法則であり, 慣性系ではない座標系 (非慣性系) では Newton の運動の法則を修正する必要がある．ここでは先ず慣性系と非慣性系について述べたあと, 非慣性系の代表的な例である一定の角速度で回転する座標系にのって物体の運動を眺めた場合について考察をしていく．一定の角速度で回転する座標系は, 地球の上に固定された座標系で物体の運動を眺めることに相当する．地球は地軸の周りを一定の角速度で自転運動しているからである．

5.1　慣性系と非慣性系

Newton の第 1 法則（慣性の法則）が成り立つような座標系を **慣性座標系**, もしくは**慣性系**とよぶ．いま慣性座標系に静止している観測者を A とし, 慣性座標系に対して速度 $\boldsymbol{v}_0$ で運動する座標系に静止している観測者を B とする．観測者 B のいる座標系が慣性系であるためには $\boldsymbol{v}_0$ はどのような条件を満たさなければならないかを議論してみる．

何の力の作用も受けずに運動する質量 m を持ったある一つの物体 (質点) を, 観測者 A と B がそれぞれ同時に観測したとする．A が観測した物体の速度を $\boldsymbol{v}_\mathrm{A}$ とし, B が観測した物体の速度を $\boldsymbol{v}_\mathrm{B}$ とする．速度は加算的だから, $\boldsymbol{v}_\mathrm{A}$ と $\boldsymbol{v}_\mathrm{B}$ の間には,

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{A} = \boldsymbol{v}_\mathrm{B} + \boldsymbol{v}_0, \tag{5.1}$$

の関係が成立する．A は慣性座標系にいるので物体に何の力が働いていなければ, 慣性の法則,

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{5.2}$$

が成り立つ．この式を (5.1) を使って書き換えると

$$\begin{aligned} & m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} = 0, \\ \therefore \quad & m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} = -m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

を得る．B のいる座標系が慣性系であるためには Newton の第 1 法則が成り立たないといけないので,

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} = -m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{5.4}$$

即ち, B のいる座標系は慣性系に対して等速直線運動 ($\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} = 0$) していなければいけない．

逆に, 慣性系に対して加速度運動している座標系[*1]は**非慣性座標系**（もしくは**非慣性系**）である．なぜなら, (5.4) より, $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} \neq 0$ となり, 物体には何の力も働いていないのに, B のいる座標系から眺めた物体の運動は慣性の法則が成り立たないからである．

次に, 質量 m を持つ物体 (質点) が力の作用のもとで運動しているときに, その運動を上で述べた 2 つの座標系において同時に観測したときに, Newton の第 2 法則がどのようになるかを見てみる．A が観測する力を $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}}$, B が観測する力を $\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}}$ とする．力は観測する座標系に依存しないから[*2] $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{F}$ である．そこで A にとっての運動方程式を (5.1) を使って書き換えると,

$$\begin{aligned} & m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}, \\ \Longrightarrow \quad & m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}, \\ \therefore \quad & m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} - m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

となる．もし B がいる座標系が慣性座標系（$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} = 0$）であれば, B の観測する物理法則 $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$ は Newton の第 2 法則と矛盾しない．一方, B のいる座標系が非慣性座標系の場合（$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} \neq 0$）, 座標系の加速度運動に伴う効果[*3]により Newton の第 2 法則は成り立たないが, 座標系の加速度運動に伴う効果を力[*4]とみなすならば, Newton の第 2 法則が成り立つことになる．[*5]

[*1] 今の設定だと, B のいる座標系が $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} \neq 0$ となる速度 $\boldsymbol{v}_0$ で A のいる座標系に対して運動している．

[*2] 今まで考察してきた具体例をもとに考えると, 例えば, バネの復元力はバネの堅さに依存する．運動する座標系でも静止している座標系でもバネの堅さは変わらないので, バネの復元力は両方の座標系で変わらない．また, 万有引力も 2 つの質点の質量と互いの距離に依存する．運動する座標系で質量や質点間の距離が変わらなければ両方の座標系で万有引力は変わらない．

[*3] $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}$ 項で表される効果．

[*4] しばしば**見かけの力**と呼ばれる．

[*5] 即ち, 同じ物体の運動を観測したとしても, 物体に働く力は慣性系と非慣性系とで異なることになる．

ある一つの物体の位置を A が観測した場合を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$, B が観測した場合を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ とする.[*6] B が慣性系にいる場合に 2 つの位置ベクトルの間になりたつ関係式は (5.1) より

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{v}_0 t \tag{5.6}$$

となる．ここで $t = 0$ で 2 つの座標系の原点は一致していたと仮定した．(5.6) は**ガリレイ変換**と呼ばれる．前段落の議論は

ガリレイ不変性

ガリレイ変換に対して Newton の運動の第 2 法則は形を変えない, **ガリレイ変換に対して不変**である

ことを意味している．

上の議論では, A のいる座標系は慣性系であるとして, それに相対的に速度 $\boldsymbol{v}_0$ で運動する座標系上の B を設定した．しかしながら, もし A のいる座標系も B のいる座標系も慣性系であれば, B のいる座標系を基準にすれば A のいる座標系は $\boldsymbol{v}_0$ で運動していることになり, 両座標系において Newton の運動の法則が成り立つので, 物理法則を用いて 2 つの座標系を区別することができないことを意味する．つまり慣性系どうしではどちらの座標系も同等で, 優劣などはないのである．

非慣性系の例として代表的なのは, ある座標軸の周りを一定の角速度で回転する回転系である．これは自転する地球上に固定された座標系を想定している．次節でこの点を議論する．

5.2 Coriolis の力

Oxyz 系 (単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) を慣性座標系, Ox'y'z' 系 (単位ベクトル $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$) を z 軸を回転軸として一定の回転角速度 $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{k}$ で回転する回転座標系とする (図 5.1 参照)．位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は 2 つの座標系で

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} \\ &= x'\,\boldsymbol{i}' + y'\,\boldsymbol{j}' + z'\,\boldsymbol{k}'\end{aligned} \tag{5.7}$$

*6

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$$

である．

と表現する．また 2 つの座標系における単位ベクトルの関係は図 5.1 より

$$\boldsymbol{i}' = \cos\Omega t\ \boldsymbol{i} + \sin\Omega t\ \boldsymbol{j}, \tag{5.8}$$
$$\boldsymbol{j}' = -\sin\Omega t\ \boldsymbol{i} + \cos\Omega t\ \boldsymbol{j}, \tag{5.9}$$
$$\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}, \tag{5.10}$$

である．

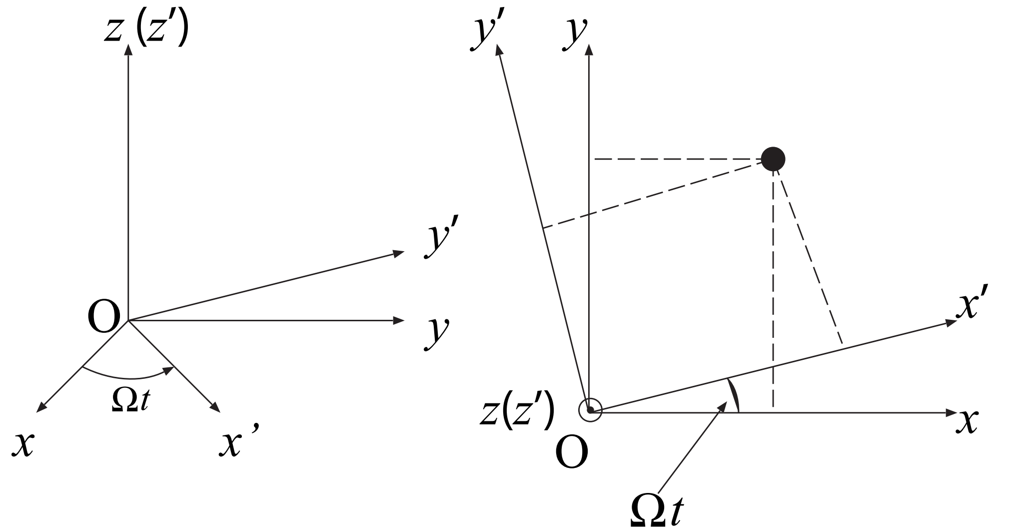

図 5.1　Oxyz 系と Ox’y’z’ 系の関係．右図は, z 軸の正の方向から座標系の xy 平面（$x'y'$ 平面）を眺めた場合の図.

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の時間微分は次式のように与えられる:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \\ &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}' + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}' + x'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} + y'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t} + z'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t}.\end{aligned} \tag{5.11}$$

ベクトルの微分に関する極めて重要な注意：

微分の chain rule に従うならば, (5.11) の第一の表現において,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} + x\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} + z\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}$$

となるはずである．しかしながら, デカルト座標系では単位ベクトルは大きさも向きも変化しない座標系である．そこで (5.11) の第一の表現において, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の時間微分はゼロである．いっぽう, 回転座標系の単位ベクトルは, 慣性系から眺めたときには時間と共にその向きを変化させている．そこで, (5.11) の第 2 の表現では単位ベクトルの時間微分が残っているのである.

このことから, ベクトルを微分する場合にはどの座標系で眺めた微分なのかをきちんと区別しておく必要がある．ここでは微分に添え字をつけることによってどの座標系で現象を観測した場合の微分なのかを明示することにする．(5.11) の微分は慣性座標系におけるデカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の微分を伴わないものなので, 慣性系の時間微分と解釈するべきである．そこでこれを

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{k} \tag{5.12}$$

と表す．一方, 回転座標系で現象を眺めたときの時間微分は, 回転座標系におけるデカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ の時間微分を伴わない．そこで

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{i}' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{j}' + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{k}' \tag{5.13}$$

である．

ベクトル $\boldsymbol{r}$ を表示するときに $(x,\,y,\,z)$ や $(x',\,y',\,z')$ と表現していたならば, このように単位ベクトルを微分することに気づかない可能性がある．そこで, **ベクトルの成分表示はできるだけやめて,** (5.7) **などのようにベクトルは成分と単位ベクトルを用いた表現を使用したほうがよい．**[*7]

(5.11) の最後の表式の第 4〜6 項は Ox'y'z' 系が Oxyz 系に対して回転しているために, Ox'y'z' 系の単位ベクトルの向きが変化することを表している．回転系の単位ベクトルの時間微分は (5.8), (5.9) より,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{I}} = -\Omega\,\sin\Omega t\,\boldsymbol{i} + \Omega\,\cos\Omega t\,\boldsymbol{j} = \Omega\,\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{i}', \tag{5.14}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{I}} = -\Omega\,\cos\Omega t\,\boldsymbol{i} - \Omega\,\sin\Omega t\,\boldsymbol{j} = -\Omega\,\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{j}', \tag{5.15}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{I}} &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{\Omega}\times(x'\,\boldsymbol{i}' + y'\,\boldsymbol{j}') \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{5.16}$$

を得る．

[*7] 単位ベクトルの微分は, 座標系が回転している場合だけでなく, 円柱座標系や極座標系のような曲線直交座標系で表現されたベクトル場の微分の際にも現れる．このことは, 力学 I の単振り子や, 本講義の中心力の問題を扱うとき既に議論した．

これまでは, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の慣性系での時間微分と回転系での時間微分の関係式を議論してきたが, 一般に, 任意のベクトルに対し慣性系における時間微分と慣性系に対して一定の回転角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転する回転系における時間微分との間には, (5.16) を参照すると,

慣性座標系の時間微分と回転座標系の時間微分の関係

$$\left(\frac{\mathrm{d}\bullet}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\mathrm{d}\bullet}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{\Omega}\times\bullet \tag{5.17}$$

の関係があることがわかる. ここで, 任意のベクトルが $\bullet$ に入ることになる. 回転軸を z 方向として議論したが, 回転軸が任意の方向のときでも, ベクトル形式で書かれたこの公式は成り立つ.

(5.16) の左辺は慣性座標系における速度, 右辺第 1 項は回転座標系における速度（回転座標系に相対的な速度）と解釈できる. そこで, これらをそれぞれ $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ と表すことにする：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{5.18}$$

(5.17) を (5.18) のそれぞれの辺に作用させると, (ここで, $\boldsymbol{\Omega}$ は定ベクトルであることに注意する)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{I}} &= \left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{\Omega}\times\right\}(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}),\\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{\Omega}\times\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{R}}}_{=\boldsymbol{v}'} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}),\\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{R}} + 2\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})
\end{aligned} \tag{5.19}$$

を得る. 慣性系における加速度 $\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{I}}$ は, 回転座標系で眺めると 3 つの要素に分解できることがわかる:

i) 回転系に相対的な加速度 : $\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{R}}$.
ii) Coriolis 加速度: $2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}'$.
iii) 向心加速度: $\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})$.

以上の議論から, もし慣性系における物体の運動が運動方程式,

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}, \tag{5.20}$$

に従うならば, この運動を慣性系に対して角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転する回転座標系から眺めると

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{5.21}$$

となる. (5.21) において, $\boldsymbol{v}$ は回転系から眺めた物体の速度であり, 時間微分は回転系に相対的な時間微分を表す.[*8] 即ち, 回転系から現象を眺めると, $\boldsymbol{F}$ 以外に, あたかも物体に新たに 2 つの力 $-2m\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}$ と $-m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})$ が働いているように見える. このような力は**見かけの力**と呼ばれる.

$-2m\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}$ は **Colioris の力**もしくは**転向力**と呼ばれる. Coriolis の力の特徴は,

- 回転軸および回転系に相対的な物体の速度に直交する方向に働く. したがってこの力は仕事をしない. (Coriolis の力を $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}}$ とすると, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$.)
- 回転系に相対的な物体の速さに依存した大きさを持つ. 回転系に相対的な運動がなければ ($\boldsymbol{v}'=0$) Coriolis の力は働かない.

である.

一方, $-m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})$ は**遠心力**と呼ばれる. 遠心力の特徴は,

- 回転軸から物体を結ぶ直線上で外向きに働く.
- 回転軸からの距離に依存する大きさを持つ.

である.

[*8] $\boldsymbol{v}'$ と $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{R}}$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ と表記した.

5.3　演習問題

5.3.1　設問

慣性系の z 軸の周りを一定の角速度 Ω で回転する回転座標系上で質量 m の質点の運動を考察することにする．回転系の z 座標は慣性系の z 座標と同じ方向にとることにする．いま, 質点は回転系の xy 平面上に束縛されており, コリオリの力の作用のみを受けて運動していると仮定する．このとき質点の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+2m\Omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}=0 \tag{5.22}$$

となる．ここで $\boldsymbol{k}$ は z 軸方向の単位ベクトルであり, $\boldsymbol{v}$ は xy 平面内の速度である．以下の設問に答えなさい.

i) (5.22) をデカルト座標系の成分に分解しなさい．ここで, $\boldsymbol{v}$ のデカルト座標系における分解は $\boldsymbol{v}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}$ であり, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ はそれぞれ回転系におけるデカルト座標系の x, y 方向の単位ベクトルである.

ii) 前問で得られた方程式の一般解を求めなさい.

iii) 前問で得られた u, v から質点の位置を時間の関数として求めなさい.

iv) 初期条件, $x(0)=0$, $y(0)=0$, $u(0)=0$, $v(0)=V$, のもとでの特殊解を求めなさい.

v) 前問より軌道が円であることを示しなさい.

vi) 質点が円軌道を 1 周する時間は角速度 Ω のみに依存して初期条件には依存しないことを示しなさい.

vii) コリオリの力は, 北半球において物体の進行方向に向かって右向き直角に働くことを考慮して, 上記の円運動がコリオリの力によって引き起こされていることを, 速度の式から確認しなさい.

5.3.2　ヒントとコメントと問題略解

i) (5.22) は回転系から現象を眺めた場合の運動方程式であることに注意しなさい. 回転系で現象を眺めたときに, そこに張られたデカルト座標系の単位ベクトルは時間に依存しないので, 時間微分が単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ に作用してもゼロであることに注意する. 結果のみを記すと, x, y 方向の運動方程式はそれぞれ

$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - 2m\Omega v = 0, \tag{5.23}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2m\Omega u = 0, \tag{5.24}$$

である.

ii) (5.23) を t に関して微分して, その結果に (5.24) を用いると, u に関する 2 階の微分方程式になる: 結果のみを記すと,

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 4\Omega^2 u = 0 \tag{5.25}$$

となる. これは定数係数の 2 階線形微分方程式なので, 推定法で解くことにより c_1, c_2 を任意定数として (5.25) の一般解は

$$u(t) = c_1\cos 2\Omega t + c_2 \sin 2\Omega t \tag{5.26}$$

となる. さらに上の解を (5.23) に代入して

$$v(t) = -c_1\sin 2\Omega t + c_2\cos 2\Omega t \tag{5.27}$$

を得る.

iii) (5.26) を t に関して積分すると $x(t)$ が得られ, いっぽう (5.27) を t に関して積分すると, $y(t)$ が得られて, それぞれ次のようになる:

$$x(t) = \frac{1}{2\Omega}\left(c_1\sin 2\Omega t - c_2\cos 2\Omega t\right) + d_1, \tag{5.28}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\Omega}\left(c_1\cos 2\Omega t + c_2\sin 2\Omega t\right) + d_2. \tag{5.29}$$

ここで, d_1, d_2 は任意定数である.

iv) 初期条件を満足するように任意定数 c_1, c_2, d_1, d_2 を決定する. その結果は, $c_1 =$

0, $c_2 = V$, $d_1 = \frac{V}{2\Omega}$, $d_2 = 0$ となる．したがって, 初期条件をも満足する解は,

$$x(t) = \frac{V}{2\Omega}\left(1 - \cos 2\Omega t\right), \tag{5.30}$$

$$y(t) = \frac{V}{2\Omega}\sin 2\Omega t, \tag{5.31}$$

$$u(t) = V \sin 2\Omega t, \tag{5.32}$$

$$v(t) = V \cos 2\Omega t, \tag{5.33}$$

である．

v) (5.30), (5.31) から t を消去して,

$$\left(x - \frac{V}{2\Omega}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{V}{2\Omega}\right)^2, \tag{5.34}$$

を得る．(5.34) は中心が $(\frac{V}{2\Omega}, 0)$ にあり, 半径が $\frac{V}{2\Omega}$ の円の式である．

vi) 速さ $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{u^2 + v^2}$ は時間に因らず V である．したがって, 前問で求めた半径 $\{V/(2\Omega)\}$ の円軌道を 1 周する時間は, $2\pi\{V/(2\Omega)\}/V = \pi/\Omega$ である．つまり, 座標系の回転角速度のみに依存して, 初期条件 V に依存しない．

座標系の回転周期 T は $T = 2\pi/\Omega$ なので, 上で述べた円軌道を質点が 1 周する時間は座標系の回転周期の半分である．

ここで述べた円軌道上を周回する振動運動は**慣性振動**, 慣性振動の周期は**慣性周期**と呼ばれている．海洋では慣性振動が潮汐の次に主要な振動現象であることが知られている．

vii) (5.30)–(5.33) を参考に, 軌道の形を図示し, そこに質点の運動の方向を矢印で記してみるとよい．