前回の話． 第10章 エネルギー保存則．

第9章で線積分を学んだ ⟶ 力学に応用・適用

★ 運動方程式

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

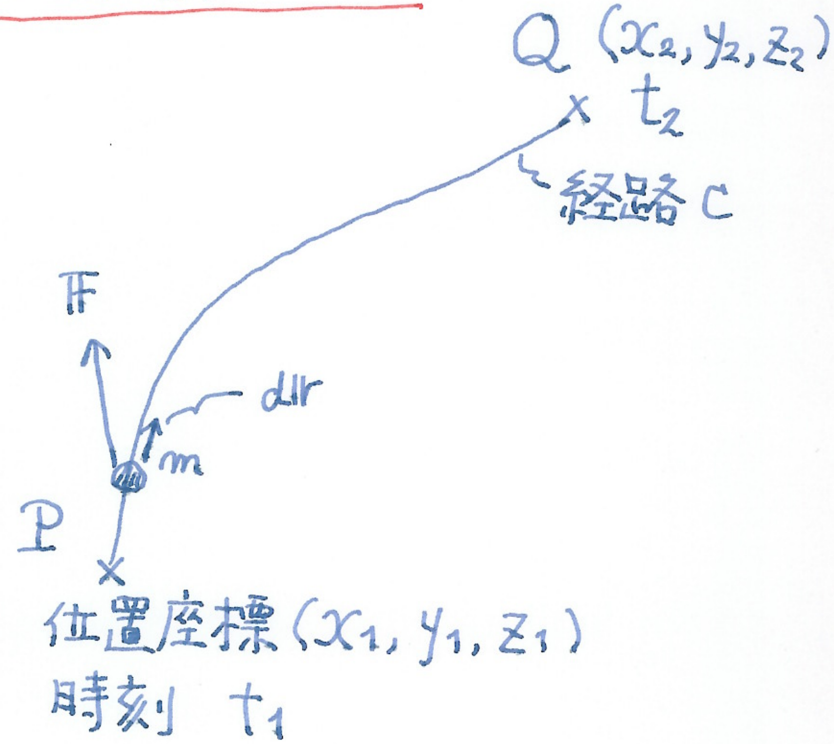
を線積分する

$$\underbrace{\int_C m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot d\mathbf{r}}_{\text{変形すると}} = \underbrace{\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}_{\text{仕事：}W}$$

$$\frac{1}{2}mv^2_{(t_2)} - \frac{1}{2}mv^2_{(t_1)}$$

$T \equiv \frac{1}{2}mv^2$ ：運動エネルギー

$$\boxed{T(t_2) - T(t_1) = W}$$



★もし力 $\mathbb{F}$ が スカラー関数 $U(\underbrace{x,y,z}_{\text{位置の関数}})$ の勾配として書ける

$$\underline{\mathbb{F} = -\nabla U} \quad \text{保存力}$$

U : ポテンシャル（位置エネルギー）

とき.

$$W = \int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \underbrace{-U(x_2,y_2,z_2) + U(x_1,y_1,z_1)}_{\text{ポテンシャルの差}}$$

ポテンシャルの差.

以上をまとめると

$$T(t_2) - T(t_1) = -U(x_2,y_2,z_2) + U(x_1,y_1,z_1)$$

又は

$$\boxed{T(t_2) + U(x_2,y_2,z_2) = T(t_1) + U(x_1,y_1,z_1)}$$

$T+U$: 力学的エネルギー

力学的エネルギー保存則を表現している.

今日の話．：エネルギー保存則の別の導出方法．

線積分を使用しない．

こちらの方法がより広く用いられる．

そのための準備（ポテンシャルに関する補足）．

1．ポテンシャルの不定性．

ポテンシャルは力 $\mathbb{F}$ から導びかれて，$\mathbb{F}$ と

$$\mathbb{F} = -\nabla U$$

の関係をみたす．

ある$\underbrace{\text{ポテンシャル}}_{U}$に U_0 という定数を足したものを

新しく $U' \equiv U + U_0$ と定義

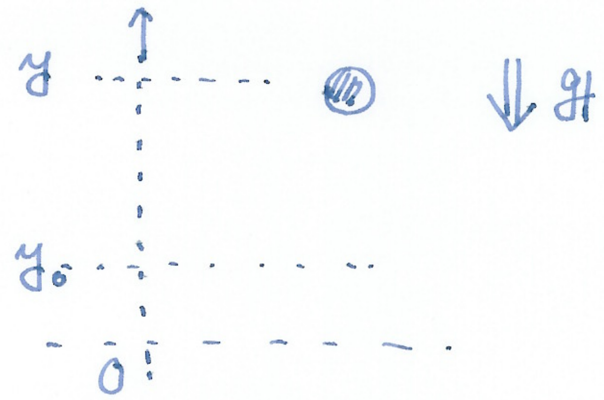
$$-\nabla U' = -\nabla(U + U_0) = -\nabla U - \cancel{\nabla U_0}$$

$$= -\nabla U = \mathbb{F}.$$

U' からも U からも同じ力 $\mathbb{F}$ が作られる．

ある基準を決めて（場所）そこを $U=0$ と定める．

例



質点の位置エネルギー（ポテンシャル）　mgy …… $y=0$ を基準

$mg(y-y_0)$　$y=y_0$ を基準

2. ポテンシャルの微分（時間微分）

$\underbrace{U(x,y,z)}_{\text{位置だけの関数}}$ ⟶ x, y, z を通じて t に依存する.

… 質点の位置は時々刻々変化する

$x(t),\ y(t),\ z(t)$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} \quad \leftarrow \star$$

$$= (\nabla U)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

$$= \nabla U \cdot \boldsymbol{v} \qquad \cdots (10.15)$$

★ 合成関数の微分

$f = f(g)$, $g = g(t)$.

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}$$

多変数関数に拡張したものが上記

自習

10.4 具体例 … 線積分を使って、一様な重力場中の物体の運動、バネにつながれた物体の運動について エネルギー保存則を導く.

10.5 エネルギー保存則の別の導出方法.

10.5.1. 一般論.

議論の出発点.

運動方程式（力はポテンシャルから導ける：保存力 の場合）

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla U \quad \cdots (10.18)$$

(10.18) と $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ (= v : 速度) との内積を計算する.

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\nabla U\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right\}$$ となる

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$ とも書ける.

運動エネルギー

確かめる

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v\cdot v\right) = \frac{1}{2}m\frac{dv}{dt}\cdot v + \frac{1}{2}m\,v\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$= m\frac{dv}{dt}\cdot v$$

$$= m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$(\text{右辺}) = -\frac{dU}{dt}$$ … (10.15) より

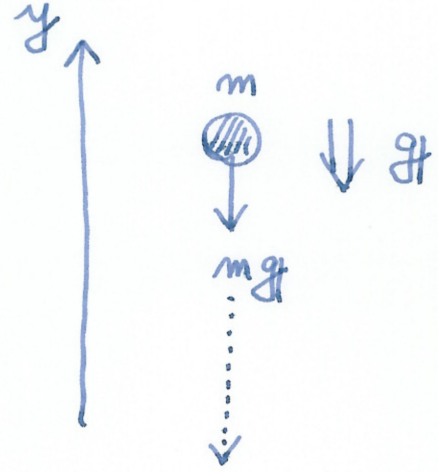
まとめると $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{dU}{dt}$$

又は $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + U\right) = 0} \quad \cdots (10.21)$$

運動エネルギーとポテンシャルの和は 時間に依存しない定数である. … 力学的エネルギー保存則 になっている.

10.5.2 具体例 1.

一様な重力場中.　自由落下.



位置ベクトル　$\mathbf{r} = y\,\mathbf{j}$ ま

物体に働く力　$\mathbf{F} = -mg\,\mathbf{j}$

このときの速度

$$\mathbf{v} = \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = v_y\,\mathbf{j}.$$

運動方程式

$$m\frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} = -mg\,\mathbf{j} \quad \cdots \quad (10.22)$$

(10.22) ~~を~~と $\mathbf{v}$ との内積を計算する

$$m\frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}\cdot\frac{dy}{dt}\mathbf{j} = -mg\,\mathbf{j}\cdot\frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} = -mg\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v_y^2\right) = -\frac{d}{dt}(mgy).$$

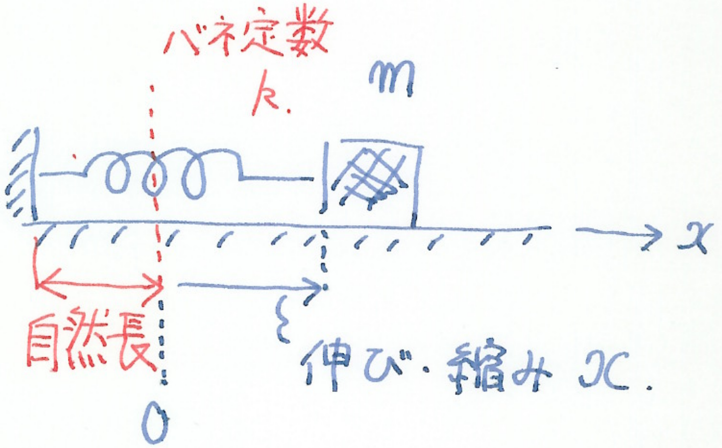
まとめると

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v_y^2 + mgy\right) = 0.}$$

運動エネルギー $\frac{1}{2}mv_y^2$ と ポテンシャル mgy $\left(\begin{array}{c} y=0 \text{ でポテン} \\ \text{シャル } 0 \end{array}\right)$

の和が時間によらない定数である.

10.5.3 バネにつながれた物体の運動



位置ベクトル

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i}$$

物体に働く力（バネの復元力）

$$\mathbf{F} = -kx\,\mathbf{i}$$

速度 $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} = v_x\,\mathbf{i}.$

運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} = -kx\,\mathbf{i} \qquad \cdots \quad (10.25)$$

(10.25) と $\mathbf{v}$ との内積を計算する

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i}\cdot\frac{dx}{dt}\mathbf{i} = -kx\,\mathbf{i}\cdot\frac{dx}{dt}\mathbf{i}$$

1　　1.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} = -kx\frac{dx}{dt}$$

$$(\text{左辺}) = m\frac{dv_x}{dt}v_x = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}m v_x^2}_{\text{運動エネルギー}}\Big)$$

$$(\text{右辺}) = -k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right).$$

以上まとめると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v_x^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right).$$

又は

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v_x^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0.}$$

運動エネルギー $\frac{1}{2}mv_x^2$ とポテンシャル $\underline{\underline{\frac{1}{2}kx^2}}$

($x=0$：自然長のときポテンシャル0) との和が時間に

依存しない定数である.