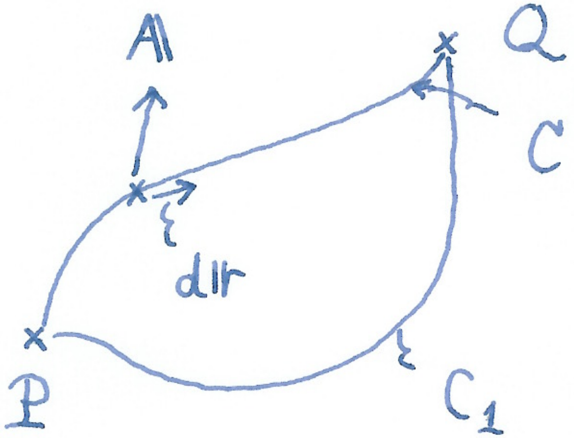
前回，前々回の話

線積分： あるベクトル $\mathbf{A}$ をある始点 P から終点 Q まで経路 C に沿って積分する．

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$



★ 一般に，P, Q が同じでも経路が異なると結果が変わる

★ ただし，$\mathbf{A} = \nabla f$ スカラー関数 f の勾配として $\mathbf{A}$ が書けるとき．

ナブラ
勾配演算子

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int df = [f]_P^Q = \underline{f(Q) - f(P)}$$

始点における f と終点における f の差で決まる．

勾配演算子

$\boldsymbol{\nabla}$ ： 三角形を~~ぎゃく~~さかさにした形で
ベクトルのように太字で書く.

別モノ.

$\triangle$ … ラプラシアン　　$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla} f) = \Delta f$.

$\square$ … ダランベルシャン

今日の話. ： 前々回・前回の話を力学に応用する.

前々回，前回 → 今回

$\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{F}$ ： 力

$\displaystyle\int_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} \longrightarrow \int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$ ： 仕事.

$\mathbb{A} = \boldsymbol{\nabla} f \longrightarrow \mathbb{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$

U ： ポテンシャル，(位置のエネルギー)

エネルギー保存則を運動方程式
から導く.

第10章　エネルギー保存則

10.1. 仕事 … 物理学ではどのような量を仕事と呼ぶか？

10.1.1 定義

ある一定の力 $\mathbb{F}$ が物体に作用していて，
その物体が $\mathbb{r}$ で表わされる移動をしたとする．
このとき，

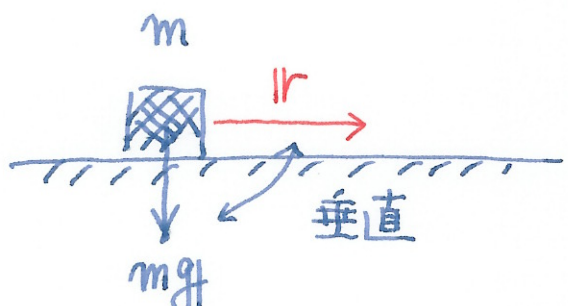
内積

$$W \equiv \mathbb{F} \cdot \mathbb{r} \quad \cdots (10.1) \quad : \text{仕事}$$

を仕事と呼んで，「力が物体にした仕事」と表現する．

例1

$\Downarrow g$



$W = mg \cdot \mathbb{r} = 0$

(力) ⊥ (移動の方向) → $W = 0$

例2

$\Downarrow g$

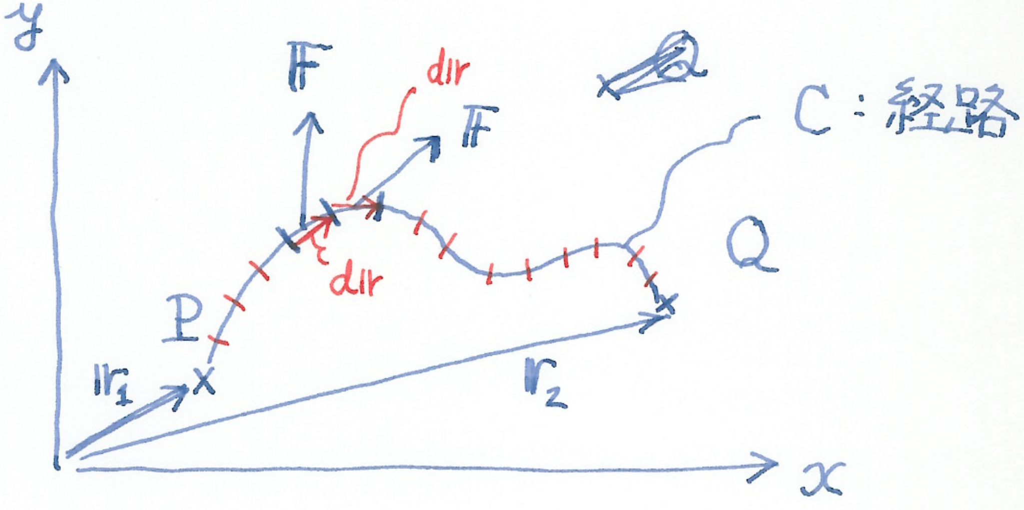
モノを動かさない！

$W = 0$

(物体が移動しなければ $W = 0$?)

一般化． 力 $\mathbb{F}$ が 時間・場所にも依存する関数．

物体が始点 P から終点 Q まで，ある経路 C に沿って移動したとする



$$\boxed{W \equiv \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}} \quad \cdots (10.2)$$

仕事は $\mathbb{F}$ の経路 C に沿う線積分として書ける

10.1.2 仕事の次元，単位．

(10.1) に基づいて考えると

$$[W] = [\mathbb{F}][\mathbb{r}] = (\text{力})\cdot(\text{長さ})$$

$$= \left(M\,L/T^2\right)\cdot L = M\left(L/T\right)^2$$

$$\underline{(\text{質量})\cdot(\text{速さ})^2}$$

エネルギーの次元と同じ

MKS 単位 ~~M… kg~~ (M… meter , K… kg , S… second.)

仕事の単位 $kg\left(m/s\right)^2 = kg\,m^2/s^2 = J$ ジュール

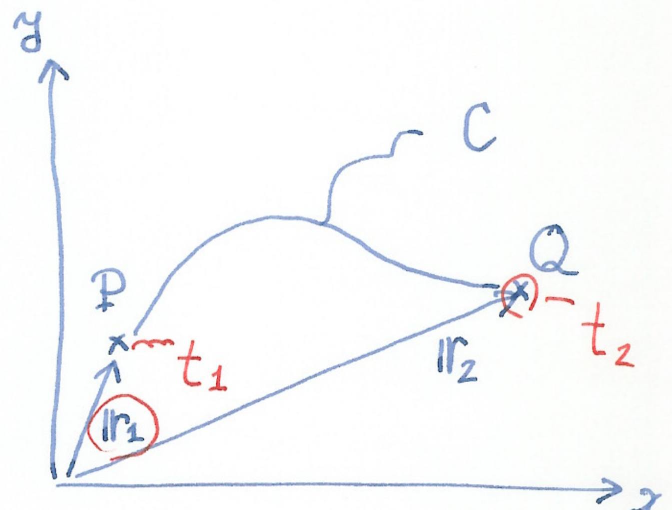
10.2. 運動方程式の線積分

運動方程式

$$m\frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2} = \mathbb{F} \quad \cdots \quad (10.5)$$

(10.5)を始点P(位置ベクトル $\mathbb{r}_1$)から終点Q(位置ベクトル $\mathbb{r}_2$)まで経路Cに沿って線積分する.

$$\underbrace{\int_C m\frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2}\cdot d\mathbb{r}}_{\text{変形をしていく.}} = \underbrace{\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}}_{\text{力}\mathbb{F}\text{が物体にした仕事: }W} \quad \cdots (10.6)$$



$\mathbb{r}$ 又は $d\mathbb{r}$ ~~が~~ は 位置ベクトルが時間 t の関数になっていることを考えると.

積分を $d\mathbb{r} \rightarrow dt$ に変数変換できる.

$$\int \cdots \, d\mathbf{r} = \int \cdots \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$$

(10.6)の左辺.

$$\int_C m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot d\mathbf{r} = \int_C m \underbrace{\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}}_{\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}} \cdot \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}_{\boldsymbol{v}:\text{速度}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} m \underline{\underline{\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot \boldsymbol{v}}}\, dt \quad \cdots (*)$$

★ $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}$ の計算

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{連鎖律}}}{=} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{内積の可換.}}}{=} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} = 2\underline{\underline{\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}}}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right) \qquad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = v^2$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

運動エネルギー：運動の激しさをあらわす量.

$$T_{(t)} \equiv \frac{1}{2}m v_{(t)}^2$$

(*)に戻って.

$$(*) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2\right) dt = \left[\frac{1}{2}m v^2\right]_{t_1}^{t_2} = T(t_2) - T(t_1)$$

以上をまとめると，運動方程式を線積分することにより

$$\boxed{T(t_2) - T(t_1) = W} \quad \cdots \text{(10.10)に対応する式}$$

始点における運動エネルギーと終点における運動エネルギーの差
（運動エネルギーが始点から終点まででどれだけ増えたか）

力が物体にした仕事.

10.3 エネルギー保存則

もし力 $\mathbb{F}$ が スカラー関数 $U(\underline{x, y, z})$ を使って

位置だけの関数

$$\mathbb{F} = -\nabla \underline{U} \quad \cdots (10.11)$$

ポテンシャル（位置のエネルギー）

表わされる場合を考えることにする.

(10.11)で表わされる力を 保存力 と呼んだりする.

ポテンシャルから導びかれる力

$\mathbb{A} = \nabla f$　　　∇fの意味　　f: 標高を想定

∇f: 等高線に垂直.

山を登る方向が正.

$= \nabla U$ … ポテンシャルの山~~を~~を下る方向を向く

保存力が働いているとき, 仕事 W は

$$W = \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = -\int_C \nabla U \cdot d\mathbb{r} = -\int_C dU = -\left[U \right]_P^Q$$

$$= -U(x_2, y_2, z_2) + U(x_1, y_1, z_1)$$

(10.10)に戻ると, 力が保存力の場合に

$$T(t_2) - T(t_1) = -U(x_2, y_2, z_2) + U(x_1, y_1, z_1)$$

$$\boxed{T(t_2) + U(x_2, y_2, z_2) = T(t_1) + U(x_1, y_1, z_1)} \quad \cdots (10.13)$$

$T + U$: 全エネルギー, 力学的エネルギー

(10.13)… 運動の始点における力学的エネルギー(右辺)と運動の終点における力学的エネルギー(左辺)が等しい.

⟶ エネルギー保存則.