前回の話.

第9章　数学的な話題

9.1 内積 ： ベクトル と ベクトル の掛け算の1つ

ベクトル → $\mathbb{A}$、ベクトル → $\mathbb{B}$

別名：スカラー積.

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ …… 結果はスカラー

内積を表わす記号

9.2 線積分 ： ベクトル，多変数関数の積分

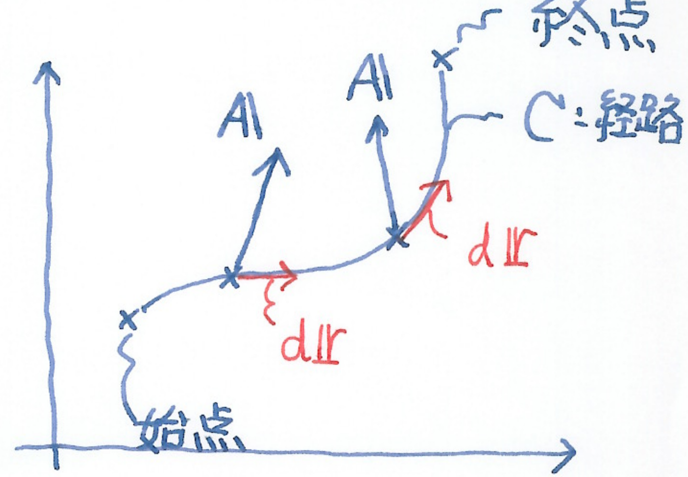
ベクトル → $\mathbb{A}(x, y)$

$$\int_C \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r}$$

内積

微小を表わす.

ベクトル　ベクトル



結果は，スカラー

〃　，始点と終点が同じでも途中の経路が違うと，異なる ← 計算は授業でやった.

一方で，宿題では，異なる経路でも，線積分の結果が一到する場合がある，ことを学んだ.

被積分関数 $\mathbb{A}$ がある性質を満たすと、
その線積分は、経路によらず、始点と終点の値
だけで決まる。 ・・・ これが今日の講義の目的.

学ぶこと　✓偏微分、✓全微分、勾配（勾配演算子）

§9.3 偏微分（partial derivative）
部分的な　微分

今までやってきた微分 ・・・ 常微分（ordinary derivative）
通常の

1変数関数の微分

$f(x)$ ・・・・ $\dfrac{df}{dx}$　fをxに関して微分する
ディーエフ ディーエックス と発声

偏微分 ・・・ 多変数関数の微分の1つ.
以下では2変数関数 $f(x, y)$ で説明

fをxで偏微分する

デルエフデルエックス と発声

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

yは一定又は定数とみなす

一定におく変数を添字として書く場合がある.

fをyで偏微分　　　　　　　　　　　　　　　　xを一定

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \equiv \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

具体例．：　$f = x^2 + y^2$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2x \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 2y .$$

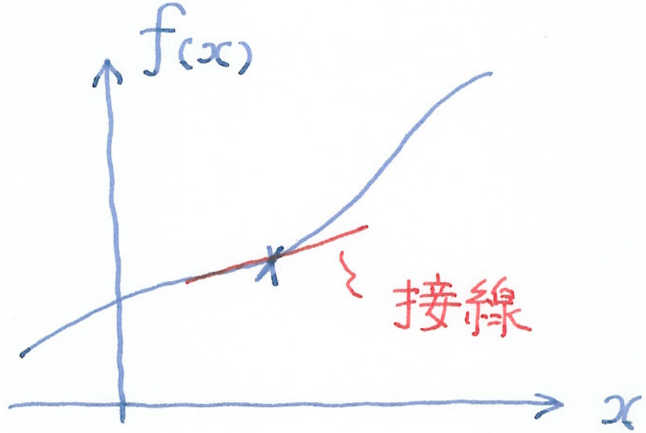
$$f = x^2 y .$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2xy \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = x^2$$

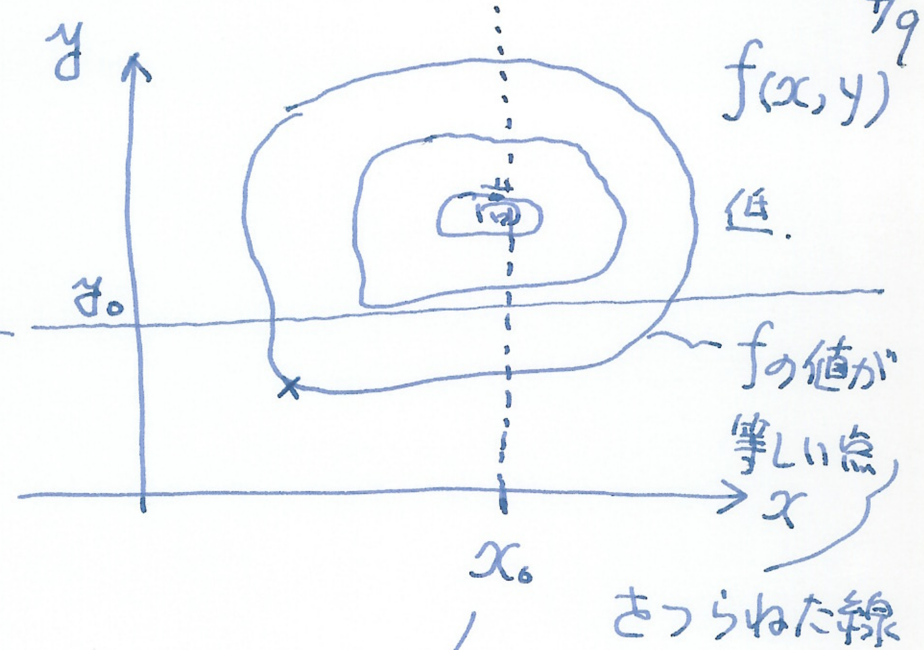
意味．

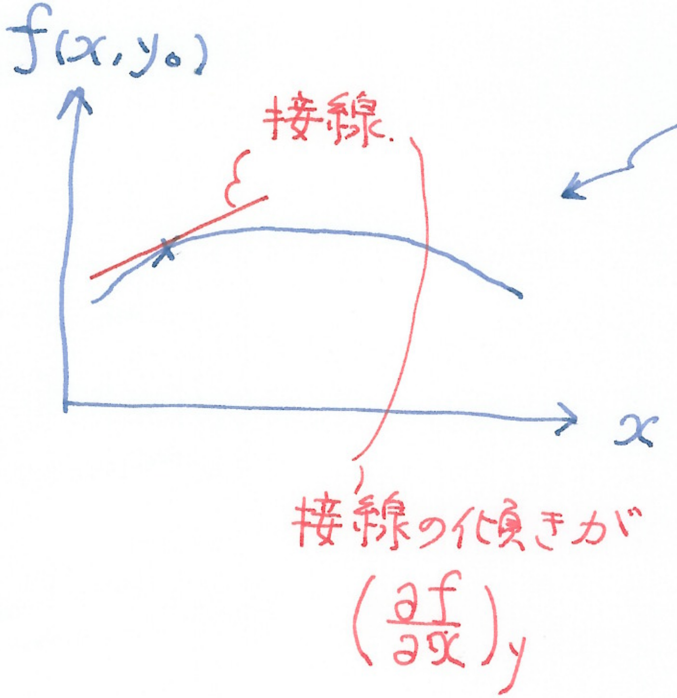
常微分の意味．

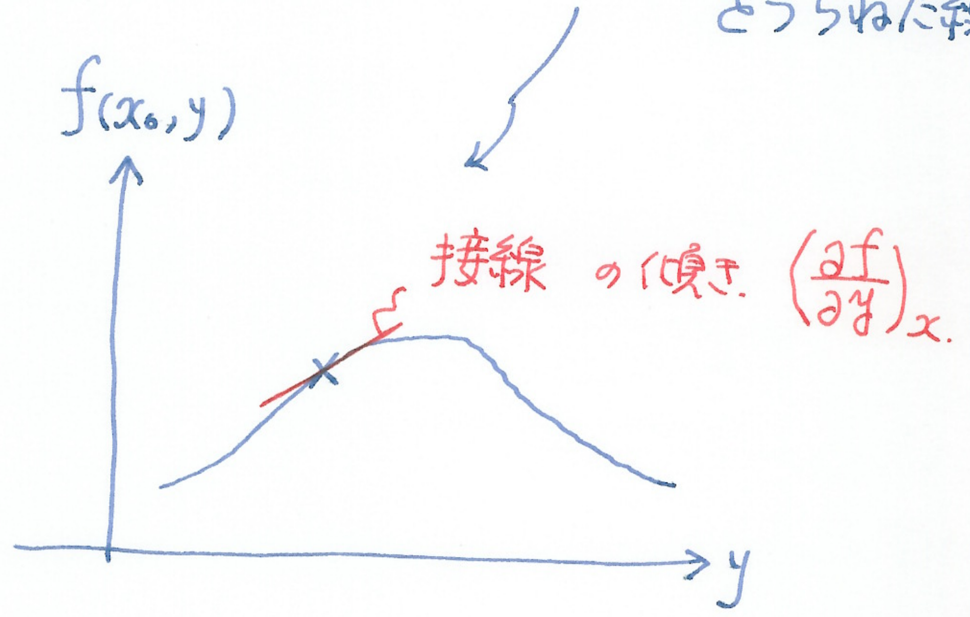
$\frac{df}{dx}$ … 接線の傾き．



f : 標高と考えてみる.


$f(x,y)$
高
低.
y_0
x_0
fの値が
等しい点
をつらねた線
x
y


$f(x, y_0)$
接線.
接線の傾きが
$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$
x


$f(x_0, y)$
接線 の傾き. $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$.
y

9.4 全微分 (total derivative.)

多変数関数の微分. $f(x, y)$ を題材

全ての変数に関して変化を考える.

$$\underline{df} \equiv f(x+dx, y+dy) - f(x, y)$$

偏微分を使うと

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy \quad \cdots (8.11)$$

9.5 勾配演算子

微分する, 積分をする というような 操作・計算をする記号のこと

$$\frac{df}{dx} \longrightarrow \underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{演算子}} f$$ と解釈.

$\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ も演算子.

ナブラ (記号)

$$\nabla \equiv i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} \left(+k\frac{\partial}{\partial z}\right)$$ デカルト座標系では.

ベクトルのように書く!

∇ は スカラー関数 f に作用したとき.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \boldsymbol{j} \quad \cdots f\text{の勾配}$$

gradient
グラディエント

— 余談. ∇ は ベクトル関数 $\mathbb{A}(x,y)$ にも作用する. —

意味が違う.

$\nabla \cdot \mathbb{A}$ … $\mathbb{A}$ の発散 (スカラー量)

内積

$\nabla \times \mathbb{A}$ … $\mathbb{A}$ の回転 (ベクトル量)

外積.

f の勾配 と f の全微分の関係.

$$\underline{\nabla f \cdot d\mathbb{r}} = \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \boldsymbol{j}\right\} \cdot \left\{dx\, \boldsymbol{i} + dy\, \boldsymbol{j}\right\}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

$$= \underline{df} \quad \cdots (8.16)$$

$d\mathbb{r}$ ~ ベクトル.
長さは微分

$d\mathbb{r} = dx\, \boldsymbol{i} + dy\, \boldsymbol{j}$

「∇f の計算の具体例」

$$f = x^2 y + x + y^2$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2xy + 1. \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = x^2 + 2y.$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathbf{j} = \boxed{(2xy+1)\mathbf{i} + (x^2+2y)\mathbf{j}}.$$

前回の宿題で線積分したベクトル $\mathbb{A}$ は.
$f = x^2 y + x + y^2$ というスカラー関数の勾配として表現できる.

$$\boxed{\mathbb{A} = \nabla f}$$

$$\int 1\,dx = \int dx = x.$$

9.6 線積分再訪.

$$\int_C \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbb{r} = \int_C df = \left[f\right]_{C\text{の始点}}^{C\text{の終点}}$$

もし $\mathbb{A}$ が f の
勾配として書ける
なら

$$= f(x_f, y_f) - f(x_i, y_i)$$

f の終点における値と始点における値との
差になっていて，経路によらない.

もし，線積分の被積分関数 $\mathbb{A}$ があるスカラー関数 f の勾配として書けるとき，$\mathbb{A}$ の線積分は，経路によらず始点と終点の値で決まる.

宿題に戻ると.

$$\int_{C\,(0,0)}^{(1,1)} \overbrace{\{(2xy+1)\,\mathbf{i} + (x^2+2y)\,\mathbf{j}\}}^{\mathbb{A}} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C\,(0,0)}^{(1,1)} \nabla(x^2y+x+y^2)\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{(0,0)}^{(1,1)} d(x^2y+x+y^2)$$

$$= \left[x^2y+x+y^2\right]_{(0,0)}^{(1,1)}$$

$$= 1+1+1-0$$

$$= 3$$

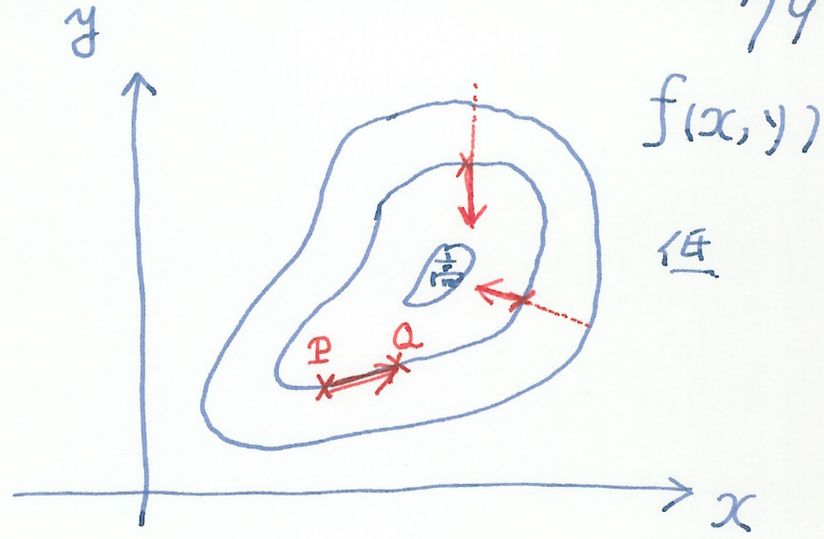
∇fが勾配と呼ばれる理由.

fの等値線上の近い点 P, Q.

点Pにおけるfの値 $f(P)$

Q 〃 $f(Q)$

等しい



等値線に沿って. fの全微分を考える.

$$df = f(Q) - f(P)$$
$$= 0$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = (\nabla f) \cdot \underbrace{d\mathbf{r}}_{P \to Q \text{ベクトル}}$$

∇f と $d\mathbf{r}$ は垂直.

$d\mathbf{r}$: 等値線に沿う方向

∇f: 等値線に垂直な方向 (fの低い方から高い方向に向く)