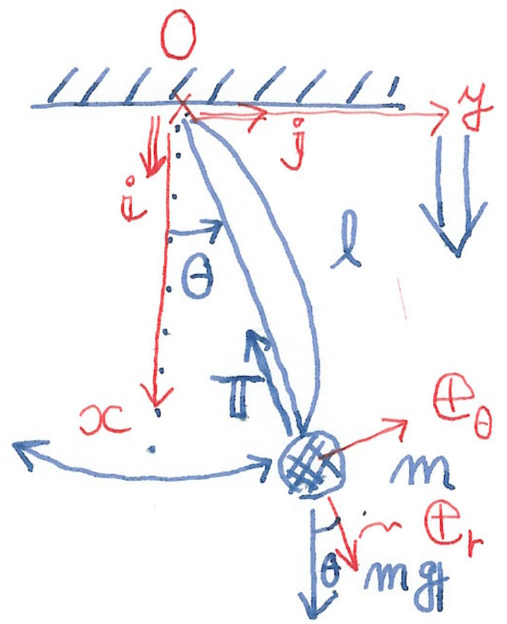
前回の話　調和振動子：振り子



e_r：動径方向の単位ベクトル

e_θ：方位角方向の単位ベクトル

振り子の ベクトル形式の運動方程式

(物体の) 位置ベクトル　$\mathbf{r}$

質量 m，　重力加速度 $\mathbf{g}$.

ひもの張力 $\mathbf{T}$

$$\boxed{m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} + \mathbf{T}}$$

↓ 2次元極座標系の各成分に運動方程式を分解

$$\boxed{\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta, \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_r}$$

$$\mathbf{r} = l\,\mathbf{e}_r$$　l：定数　ひもは伸び縮みしない

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = l\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(l\frac{d\theta}{dt}\mathbb{e}_\theta\right) = l\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbb{e}_\theta + l\frac{d\theta}{dt}\frac{d\mathbb{e}_\theta}{dt}$$

$$= l\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbb{e}_\theta - l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\mathbb{e}_r$$

$$\mathbb{g} = g\cos\theta\,\mathbb{e}_r - g\sin\theta\,\mathbb{e}_\theta \qquad g = |\mathbb{g}|$$

$$\mathbb{T} = -T\,\mathbb{e}_r \qquad T = |\mathbb{T}|.$$

運動方程式

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbb{e}_\theta - ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\mathbb{e}_r = mg\cos\theta\,\mathbb{e}_r - mg\sin\theta\,\mathbb{e}_\theta - T\,\mathbb{e}_r$$

動径方向成分

$$-ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - T$$

未知変数 θ だけ.

方位角方向成分

$$\boxed{ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta}$$

これを解いて, θ を t の関数として表現する.

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sim}\,\theta} \qquad (8.12b)$$

線形微分方程式　vs.　非線形微分方程式

上の微分方程式の独立な解を θ_1, θ_2 とする.

$\theta_1 + \theta_2$ が解になっているか, 確かめる.

$$\frac{d^2(\theta_1+\theta_2)}{dt^2} = \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sim}\,\theta_1 - \frac{g}{l}\,\mathrm{sim}\,\theta_2$$

$\theta_1 + \theta_2$ が (8.12b) の解ならば

$$\times\ = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sim}(\theta_1+\theta_2)$$

成り立たない

とならないといけない.

$$\mathrm{sim}(\theta_1+\theta_2) \neq \mathrm{sim}\,\theta_1 + \mathrm{sim}\,\theta_2$$

つまり, (8.12b) は非線形微分方程式

(8.12b) 手で解ける非線形微分方程式

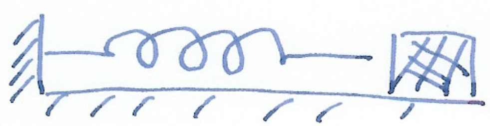
近似的な場合を以下では考える

ふれ角 θ が非常に小さい場合　$|\theta| \ll 1$

$\sin\theta \approx \theta$

(8,12b) → $\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{\ell}\theta}$ 正の量

線形微分方程式



$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\boxed{\dfrac{k}{m}}x$ 正の量

一般の関数を近似する方法

テイラー展開

⋮

第14回目（オンデマンド）の授業で解説.

全く同じ形の微分方程式

解も同じ

$\theta(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$

$\omega = \sqrt{g/\ell}$

$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$

$\omega = \sqrt{k/m}$

共に調和振動

エネルギーに関する議論を行ないたい.

そのために必要な数学的な話題を話す.（2回分）.

第9章　数学的話題：内積，線積分，~~每~~ 偏微分

9.1 内積.

ベクトル $\mathbb{A}$ とベクトル $\mathbb{B}$ の掛け算の一種.

★ 内積 スカラー積　$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$　…　結果はスカラー

内積の記号

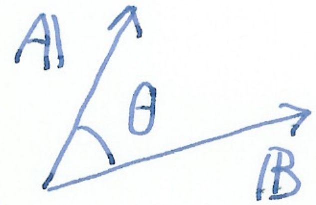
後期の力学II ⟶ 外積 ベクトル積　$\mathbb{A} \times \mathbb{B}$　〃　ベクトル

外積の記号

この記号は「絶対に」省略してはいけない.

$\mathbf{A}$と$\mathbf{B}$の内積の定義

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A\,B\cos\theta \quad \cdots (8.2)$$



$A = |\mathbf{A}|$
$B = |\mathbf{B}|$.

内積の性質

1. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$　　可換則

2. $\mathbf{A}$と$\mathbf{B}$が直交しているとき（$\theta = \pi/2$.）

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0.$$

~~デルコ~~デカルト座標系の単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は互いに直交

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0.$$

3. $\mathbf{A}$と$\mathbf{A}$の内積（$\theta = 0$のとき）

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 \qquad A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1 \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1 \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

4. $\mathbb{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$
$\mathbb{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$ と分解できるとき

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\
&= A_x B_x \underbrace{\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}}_{1} + A_x B_y \cancel{\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}} + A_x B_z \cancel{\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}} \\
&\quad + A_y B_x \cancel{\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}} + A_y B_y \underbrace{\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}}_{1} + A_y B_z \cancel{\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}} \\
&\quad + A_z B_x \cancel{\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}} + A_z B_y \cancel{\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}} + A_z B_z \underbrace{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}_{1} \\
&= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z
\end{aligned}$$

対応する成分どうしの積の和.

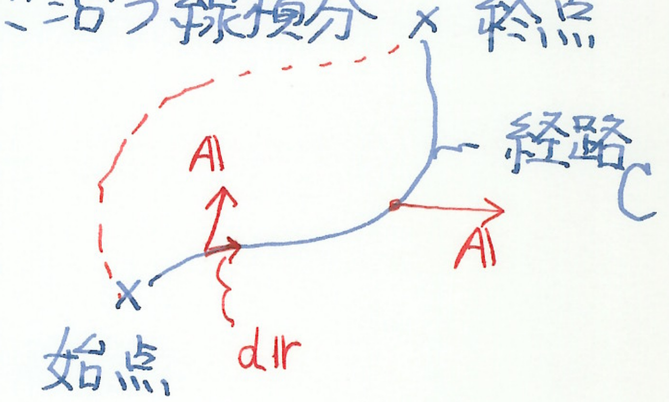
§9.2 線積分.

通常の積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

被積分関数 スカラー
1変数.

8.2.1 定義　線積分　　被積分関数 … ベクトル
多変数

あるベクトル $\mathbb{A}(x,y,z)$ の経路Cに沿う線積分



$$\int_C \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r} = \text{スカラー量}$$

$\mathbb{A}$：ベクトル　$\cdot$：内積　$d\mathbb{r}$：経路に沿うベクトル

スカラー量：始点と終点が同じでも経路が異なると値が変わる

デカルト座標では

$$\mathbb{A} = A_x \mathbb{i} + A_y \mathbb{j} + A_z \mathbb{k}, \qquad d\mathbb{r} = dx\, \mathbb{i} + dy\, \mathbb{j} + dz\, \mathbb{k}$$

$$\underline{\int_C \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r} = \int A_x dx + A_y dy + A_z dz.}$$

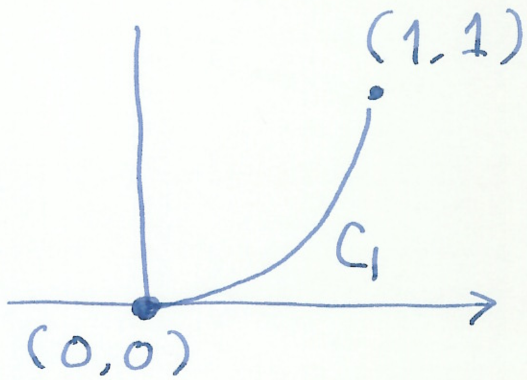
8.2.2 具体例.

$\mathbb{A} = (3x^2 - 6y)\,\boldsymbol{i} + (3x + 2y)\,\boldsymbol{j}$ を

$(x, y) = (0, 0)$ から $(x, y) = (1, 1)$ まで

次の経路に沿って線積分しなさい.

(a) C_1：経路. $y = x^2$



$$\int_{C_1} \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r} = \int_{C_1} (3x^2 - 6y)\,dx + (3x + 2y)\,dy$$

$dy = 2x\,dx$

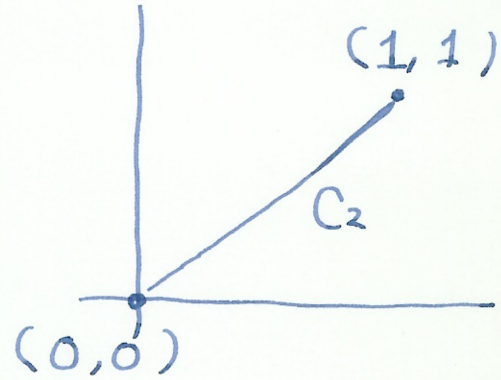
$$= \int_0^1 \underbrace{(3x^2 - 6x^2)}_{-3x^2}\,dx + \int_0^1 \underbrace{(3x + 2x^2)\,2x}_{6x^2 + 4x^3}\,dx$$

$$= \left[-x^3\right]_0^1 + \left[2x^3 + x^4\right]_0^1$$

$$= -1 + 2 + 1 = 2$$

10/10

(b) C_2 : 直線 $\quad y=x$



$$\int_{C_2} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_{C_2} (3x^2-6y)\,dx + (3x+2y)\,dy$$

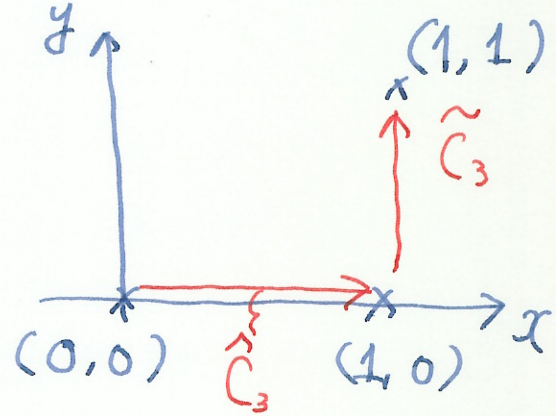
$dy=dx$

$$= \int_0^1 (3x^2-6x)\,dx + \int_0^1 \underbrace{(3x+2x)}_{5x}\,dx$$

$$= \left[x^3-3x^2\right]_0^1 + \left[\frac{5}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= 1-3+\frac{5}{2} = \frac{2-6+5}{2} = \frac{1}{2}$$ //

(c) $C_3 = \hat{C}_3\ (0,0)\to(1,0) + \tilde{C}_3 : (1,0)\to(1,1)$



$$\int_{C_3} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_{C_3} (3x^2-6y)\,dx + (3x+2y)\,dy$$

$$= \underbrace{\int_0^1 3x^2\,dx}_{\hat{C}_3\text{にそう積分}} + \underbrace{\int_0^1 (3+2y)\,dy}_{\tilde{C}_3\text{にそう積分}}$$

$$= \left[x^3\right]_0^1 + \left[3y+y^2\right]_0^1 = 1+3+1 = 5$$ //