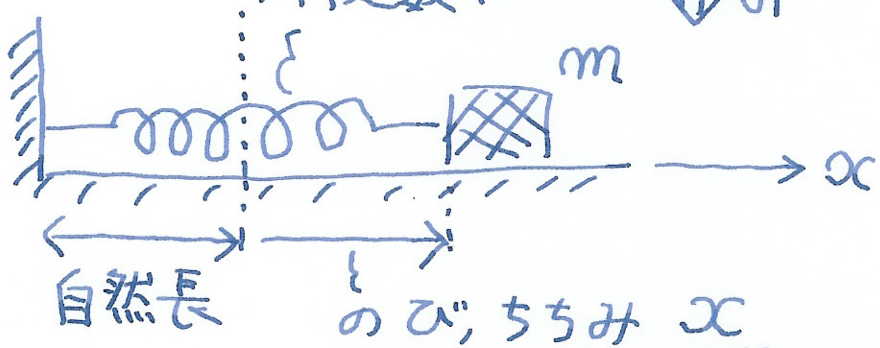
第8章　調和振動子（その2.）：振り子の運動

時間発展が三角関数で表わされる

前々，前回　バネにつながれた物体の運動

⇓例



運動方程式（x成分）　$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$

↓ mでわり　$\omega \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

〜 解きたいビブン方程式　(1)

線形微分方程式，推定法

(1)の一般解　$\underline{x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}}$　C_1, C_2：任意定数

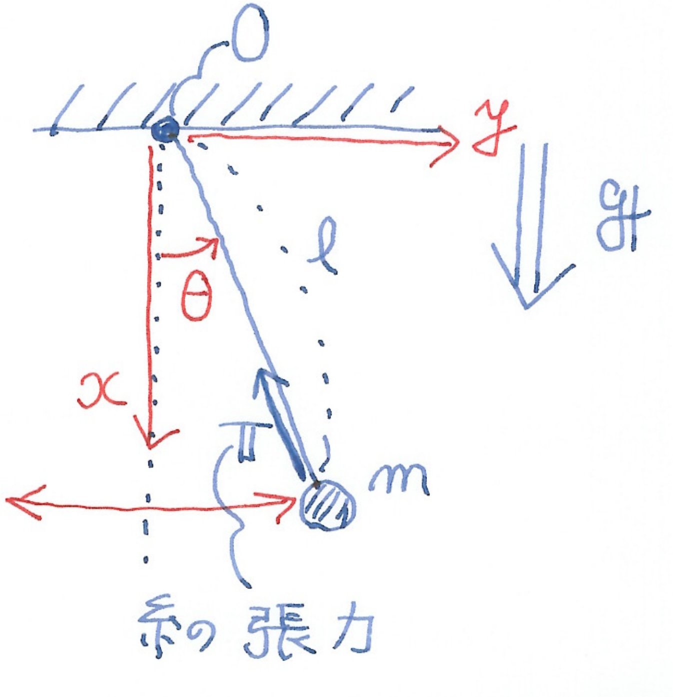
↓ Eulerの公式

$x = D_1 \cos\omega t + D_2 \sin\omega t$　とも書ける．

D_1, D_2：任意定数

8.1. 問題設定.

- 伸び縮みしない質量の無視できる長さℓのヒモの片端に、質量mの物体(質点)が結びつけられている.
- 鉛直2次元平面内で、ヒモのもう一方の端を支点とする. ヒモがたるまない状態での物体の運動を考える.



ふれ角 θ

運動方程式

$$\boxed{m\ell^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\cancel{mg\theta}\ mg\sin\theta}$$

↓ θが小さいとき.
微小振幅振動
$\sin\theta \simeq \theta$

$$\cancel{m}\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\cancel{m}g\theta \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta}$$

運動方程式（ベクトル形式）

物体の位置ベクトル $\mathbb{r}$

$$\boxed{m\frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2} = m\mathbb{g} + \mathbb{T}}$$

重力　糸の張力

↓ 座標系の各成分に分解.

座標系.

デカルト座標系

- x軸　鉛直下向き.
- y軸.　x軸の垂直左向き.

未知変数　x, y : 2個

↓ 別の座標系を使って未知変数の数をへらす.

$\boxed{\text{2次元極座標系.}}$

第8章の話の中心.

8.2 2次元極座標系.

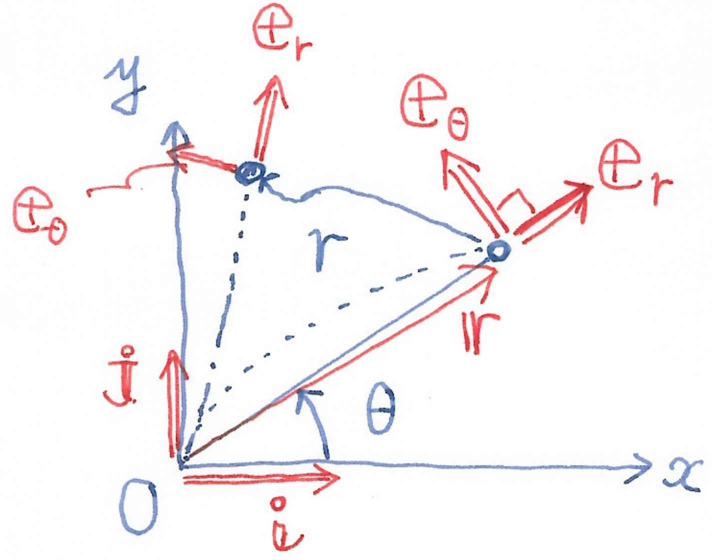
2次元デカルト座標系　物体の位置座標　(x, y)

2次元極座標系　〃　(r, θ)

動径距離 : 原点と物体とのキョリ

方位角 : $\theta > 0$　反時計回り

$\theta < 0$　時計回り



2次元極座標系の単位ベクトル

動径方向の単位ベクトル

$\mathbf{e}_r$

eの太字と添字r

方位角方向の単位ベクトル

$\mathbf{e}_\theta$

$\underbrace{\mathbf{i}, \mathbf{j}}$ と $\underbrace{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta}$ との最大の違い.

時間がたっても向きが変らない.

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = 0$$

時間と共に向きがかわる.

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \neq 0 \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \neq 0$$

いったいどのようになるか?

これから説明.

① 幾何学的に.導出 ← 授業で

② 計算して.導出. ← 宿題.

何故 $\dfrac{d\mathbf{e}_r}{dt}$, $\dfrac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$ が必要なのか？

位置ベクトル $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$ 　2次元極座標では

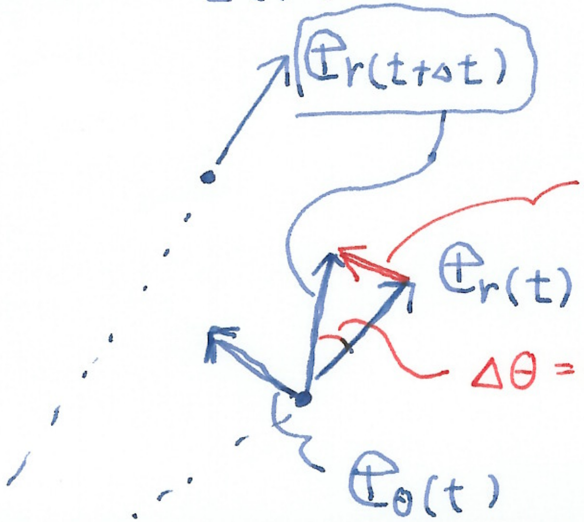
速度. $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(r\,\mathbf{e}_r)$

微分の連鎖律

$$= \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\underline{\underline{\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}}}$$

$\dfrac{d\mathbf{e}_r}{dt}$ の導出

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{e}_r(t+\Delta t) - \mathbf{e}_r(t)}{\Delta t}$$ ：ベクトルの微分の定義



$\mathbf{e}_r(t+\Delta t) - \mathbf{e}_r(t)$ ：ベクトル

$\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$

方向 ：$\mathbf{e}_\theta(t)$ 　$\Delta t \to 0$ で

大きさ ：長さ1、$\Delta\theta$ の角度の円弧 $\underset{\Delta t \to 0}{}$

$$\underline{\underline{\Delta\theta}}$$

$$\frac{d\mathbb{e}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta \ \mathbb{e}_\theta}{\Delta t} = \underline{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t}} \ \mathbb{e}_\theta$$

$$= \frac{d\theta}{dt}\mathbb{e}_\theta$$

$$\boxed{\frac{d\mathbb{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbb{e}_\theta} \quad \cdots (8.2)$$

$\dfrac{d\mathbb{e}_\theta}{dt}$ の導出.

$\mathbb{e}_r$ と $\mathbb{e}_\theta$: 角度が 90°ズレている.

$\mathbb{e}_r$ を ~~逆~~ 反時計まわりに 90° まわすと $\mathbb{e}_\theta$ になる.

$$\boxed{\frac{d\mathbb{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\mathbb{e}_r.} \quad \cdots (8.3)$$

2次元極座標系における.

位置ベクトル $\mathbb{r} = r\,\mathbb{e}_r$

速度. $\mathbb{v} = v_r \mathbb{e}_r + v_\theta \mathbb{e}_\theta$ とおく.

$$= \frac{d\mathbb{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbb{e}_r + r\underline{\frac{d\mathbb{e}_r}{dt}}$$

$$= \frac{dr}{dt}\mathbb{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbb{e}_\theta$$

$\mathbb{v}$ の動径方向成分 $v_r = \frac{dr}{dt}$

$\mathbb{v}$ の方位角方向成分 $v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$

(8.5)

加速度. $\mathbb{a} = a_r \mathbb{e}_r + a_\theta \mathbb{e}_\theta$

$$= \frac{d\mathbb{v}}{dt}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\mathbb{e}_r + \frac{dr}{dt}\underbrace{\frac{d\mathbb{e}_r}{dt}}_{(8.2)} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbb{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbb{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\underbrace{\frac{d\mathbb{e}_\theta}{dt}}_{(8.3)}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\mathbb{e}_r + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbb{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbb{e}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\mathbb{e}_r$$

$$= \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\mathbb{e}_r + \left\{2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}\mathbb{e}_\theta$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}\text{の動径方向成分} \quad a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - \underline{r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \\
&\boldsymbol{a}\text{の方位角方向成分} \quad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}
\end{aligned}
\right\} \quad (8.7)
$$

向心加速度.

$$-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -r\left(\frac{v_\theta}{r}\right)^2 = -\frac{v_\theta^2}{r}$$