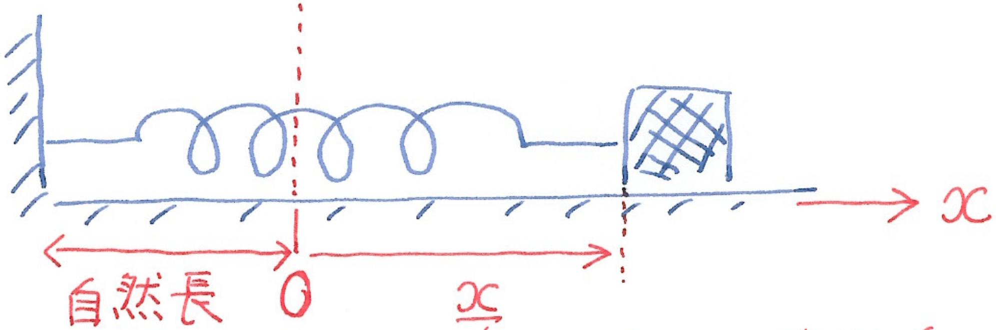
前回の話.

第7章 調和振動子.（その1.）.

時間発展が三角関数で表わされる.



x 〜 ばねの伸び（$x>0$）
縮み（$x<0$）

バネ定数 k の線形バネにつながれた質量 m の物体の運動を考察する. 物体にはバネの復元力のみが働いているとする.

運動方程式　x 方向成分

（$k>0$）

☆ $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\underbrace{kx}_{\text{~~のみ~~のび、縮みに比例}} \quad \cdots (7.4)$$

↑ 復元の効果を表現

(7.4) mでわる.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x.$$

$k>0,\quad m>0$

$\frac{k}{m}>0$ である

ω：オメガ

$\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.} \quad \cdots(7.5)$$

又は

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \quad \cdots(7.5)'$$

(7.5)を解くために微分方程式の性質を学んだ.

線形微分方程式

x：未知変数

x_1, x_2 独立な解が存在したとき. それらを重ね合わせたもの $C_1x_1 + C_2x_2$ も解になっている 微分方程式

C_1, C_2：任意定

宿題

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + A\frac{dx}{dt} + Bx = 0}$$

$A=0,\ B=+\omega^2$ とすれば(7.5)'と一致.

線形微分方程式.

7.6 運動方程式の解：$\underbrace{\text{線形}}_{2\text{階}}$微分方程式の解法.

数学の授業，大学4年間を通じて目にする微分方程式を解く代表的.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0 \quad \cdots (7.5)'$$

“推定法”

☆ $(7.5)'$ の解を $\boxed{x_{(t)} = e^{\lambda t}}$ と推定する. $\cdots (7.10)$

☆ (7.10) の解が $(7.5)'$ をみたすように λ を決める.

λ：ラムダ 定数.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(e^{\lambda t})=\lambda e^{\lambda t}=\lambda x.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(\lambda x)=\lambda\frac{dx}{dt}=\underline{\lambda^2 x}.$$

$(7.5)'$ は

$$\lambda^2 x+\omega^2 x=0 \longrightarrow (\lambda^2+\omega^2)x=0$$

という微分を含まない式になった.

$(\lambda^2+\omega^2)x=0 \longrightarrow x_{(t)}=0$ 任意のtで常に$x=0$.
無意味，自明な解.

$x \neq 0$（非自明な解）$\longrightarrow \lambda^2+\omega^2=0.$

$\lambda^2=-\omega^2$
又は
$\lambda=i\omega, \quad \lambda=-i\omega. \quad \cdots(7.11)$
2つのλが求められた

結局　推定した微分方程式の解は

$x=e^{i\omega t}$（$=x_1$に相当）　$x=e^{-i\omega t}$（$=x_2$に相当）

となる。

$(7.5)'$は線形微分方程式なので重ね合わせた解
も$(7.5)'$の解になっている.

$(7.5)'$の一般解（任意定数を含む解）

$$\boxed{x_{(t)}=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}} \quad \cdots(7.12)$$

（C_1, C_2は任意定数.）

初期条件はここまで考慮していなかった.

以下で初期条件を考慮して，$\underline{C_1, C_2}_{\text{2個}}$ を決定する．

初期条件（2個）
$t = 0$ 　 $x_{(0)} = A$ 　 A：定数．
　　　　　　　　　　　 $A > 0$ 初期に伸び
　　　　　　　　　　　 $A < 0$ 縮み．

$v_x = \dfrac{dx}{dt}$
$v_x(0) = 0$ …… 初速度0で静かに運動が始まる．

(7.12) に $t=0$ を代入

$$x_{(0)} = C_1 + C_2 = A$$

(7.12) を t で微分

$$v_{x(t)} = i\omega C_1 e^{i\omega t} - i\omega C_2 e^{-i\omega t}$$

$t=0$ を代入

$$v_{x(0)} = i\omega C_1 - i\omega C_2 = i\omega (C_1 - C_2) = 0$$

$C_1 = C_2$．

$C_1 + C_2 = C_1 + C_1 = 2C_1 = A$

$$\therefore \boxed{C_1 = \frac{A}{2}, \quad C_2 = \frac{A}{2}}$$

(7.12) に戻る．

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\omega t}$$
$$= \frac{A}{2} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right)$$

Eulerの公式を使う.

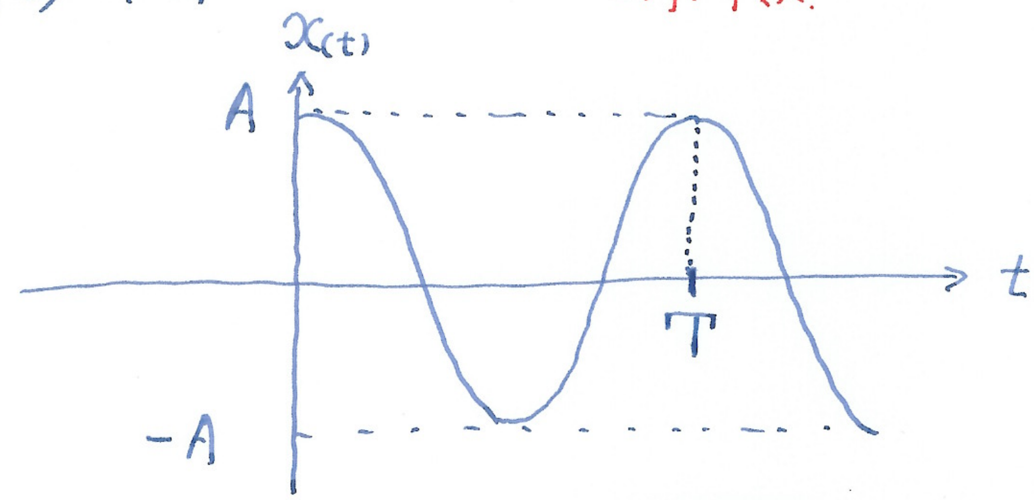
$$= \frac{A}{2} \left\{ \underline{\cos(\omega t)} + \cancel{i \sin(\omega t)} + \underline{\cos(\omega t)} - \cancel{i \sin(\omega t)} \right\}.$$
$$= A \cos(\omega t).$$

∴ 初期条件を満足する. (7.5)', 又は 運動方程式の解は.

$$x(t) = A \cos(\omega t) \cdots (7.17) \quad \text{ここで } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

三角関数.

7.7 解の吟味



$A > 0$. と仮定.

$|A|$：振幅.

T：振動が元にもどる時間：周期

$\cos\theta = \cos(\theta + \underline{\underline{2\pi}})$ ： 三角関数の性質より.

$\cos(\underbrace{\omega t}_{\theta\text{に対応}}) = \cos\{\underline{\omega(t+T)}\}$ を満足するためには

$\underline{\omega t} + \underline{\underline{\omega T}}$

2πに対応.

$\omega T = 2\pi \rightarrow \underline{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}.$

7.8 議論

三角関数の性質 $\underline{\underline{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.}}$ を使って.
ギロンできないか？

(7.17) $x(t) = A\cos(\omega t)$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t.)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A} \qquad \sin(\omega t) = -\frac{v_x}{\omega A}$$

$$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = \underline{\frac{x^2}{A^2} + \frac{v_x^2}{\omega^2 A^2} = 1.}$$

両辺に $\frac{1}{2}\omega^2 A^2$ をかける.

$$\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}v_x^2 = \frac{1}{2}\omega^2 A^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{1}{2}\frac{k}{m}x^2 + \frac{1}{2}v_x^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{m}A^2$$

両辺に m をかける.

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\text{時間に依存}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_x^2}_{\text{時間に依存}} = \underbrace{\frac{1}{2}kA^2}_{t\text{に依存しない.}}}$$

エネルギー保存則

バネの弾性力による位置エネルギー

ポテンシャル

運動エネルギー

全エネルギー

より詳しくは 第9章 であつかう.

運動方程式から直接エネルギー保存則を導く.