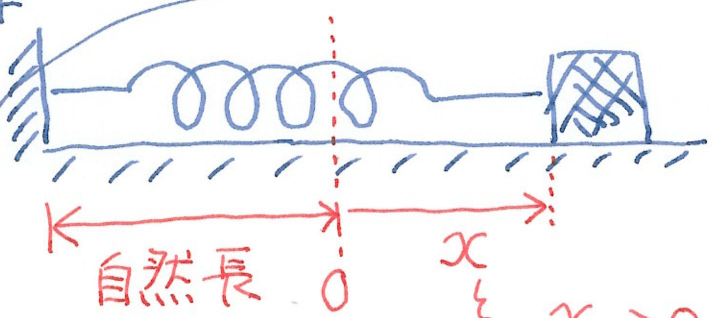
第7章　調和振動子（その1）：

バネにつながれた物体の運動・振動

これから3回分の授業．

第7章

デカルト座標



$x > 0$ のび

$x < 0$ 縮み．

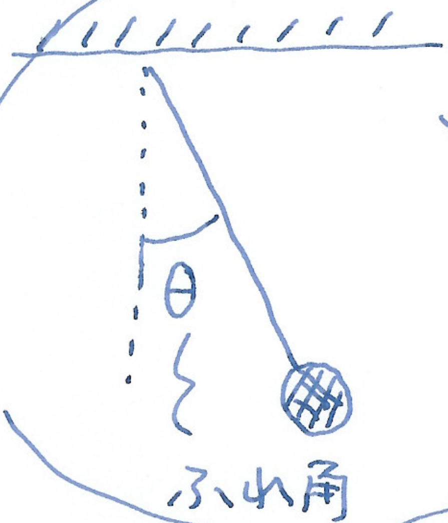
$$x(t) \propto \cos(\omega t)$$
$$\propto \sin(\omega t)$$

ω：オメガ

三角関数で表わされる発展

第8章．

極座標



$$\theta(t) \propto \cos(\omega t)$$
$$\propto \sin(\omega t)$$

三角関数で表わされる発展

単振動と呼ばれる

又は調和振動

単振動する系のことを調和振動子

2/10

振動する現象.（周期的にくり返す現象）… 自然界に多く存在する.

調和振動子は 周期的にくり返す自然現象を考察する際の 模型になる.

2年生 物理学 II … 波動・振動を詳細に学ぶ

問題設定… 与えられる.

ベクトル形式で運動方程式をたてる.

運動方程式を成分に分解する.

微分方程式

運動方程式（微分方程式）を解く.

ギロンの流れ.

調和振動子の運動方程式は単純に積分しただけでは答えが求められない.

→ 微分方程式を解く別の方法をここで学ぶ.

非常に広く用いられる方法.

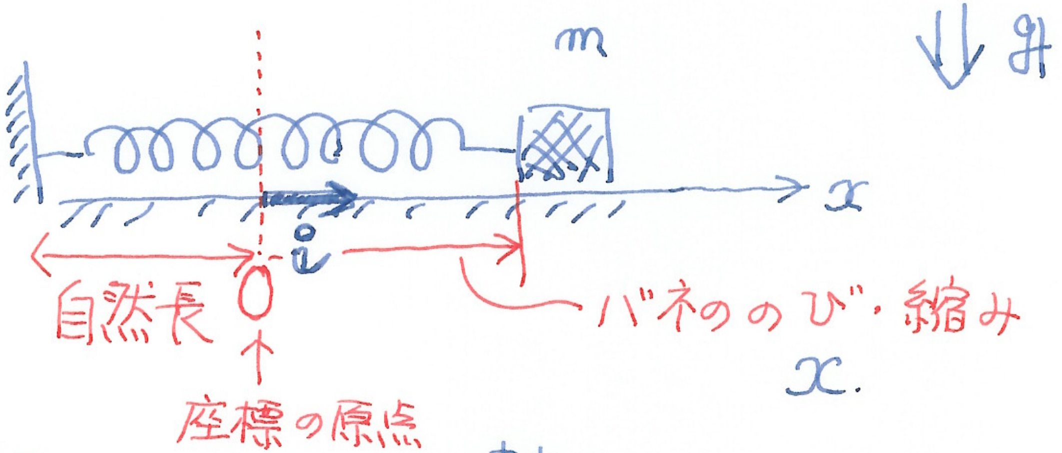
7.1. 問題設定.

☆ 水平でなめらかなテーブル上で質量の無視できるバネ定数 k $(k>0)$ の線形バネにつながれた物体(質点)の運動を考える. バネの他端は固定されている.

$\underbrace{\text{物体}}_{\text{質量 } m \text{ の}}$

☆ 物体に働く力は バネの復元力 のみとする.

絵に書いてみる.



☆ デカルト座標. 水平面に x 軸

位置ベクトル $\mathbb{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i}$

x が t のどのような関数として表わされるか?

7.2 言葉の定義

バネ定数 k の線形バネ

バネが物体に及ぼす力　$\mathbb{F}$

$|\mathbb{F}| \propto$ のび・ちぢみ

$\uparrow$ 比例　　比例定数 k.

$$\boxed{|\mathbb{F}| = k|x|}$$

バネ定数 k の線形バネが及ぼす 復元力.

復元力の方向

バネが伸び → 縮む方向に力が働く

バネが縮み → 伸びる方向に力が働く

$$\boxed{\mathbb{F} = -kx\,\mathbf{i}}$$

↑ 復元を表現している.

$x>0$ (伸び)　x ~~の~~ 軸の負の方向に力.

$x<0$ (縮み)　x 軸の正の方向に力.

力とのび・縮みの関係 : ~~[illegible]~~ フックの法則.

7.3 初期条件.

代表的な初期条件.

①

初期にA だけ (伸び・縮み) していて, 初速度 0.

$$\begin{cases} x(0) = A. \\ v_x(0) = 0 \end{cases}$$

↓

授業で考える

②

初期に物体が原点にあり, 初速度(のx成分)がv_0

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ v_x(0) = v_0 \end{cases}$$

↓

演習問題2

来週に出題する宿題.

7.4 運動方程式

ベクトル形式 $m\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -kx\mathbf{i}.$

デカルト座標系で分解

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} = -kx\mathbf{i}.$$

成分の式

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.}$$

上式を m で割る.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\boxed{\frac{k}{m}}x$$

$k>0,\ m>0,\Rightarrow \dfrac{k}{m}>0.$

ω (オメガ)

$\omega^2 \equiv \dfrac{k}{m}\ (>0)$

今解きたい微分方程式は

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x} \quad \cdots (7.5)$$

である.

例えば

$$\int \frac{d^2x}{dt^2}\,dt = -\omega^2 \int x\,dt$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega^2 \int x\,dt \cdots$$

これ以上計算できない。

xがtの関数として与えられていないと右辺の積分が実行できない！

運動方程式・微分方程式を単に積分しても答え（xをtの関数として表現すること）が出てこない。

微分方程式を解くには、型に応じた方法がある。

みきわめる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.$$

又は

$$\underbrace{(1)}_{\text{係数}1}\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{\text{2階微分}} + \underbrace{\omega^2}_{\text{係数}} x = 0$$

定数係数の2階
線形微分方程式

7.5 線形微分方程式の性質

次の2つの性質をみたす微分方程式のことを線形微分方程式と呼ぶ

① 微分方程式の独立な2つの解 x_1, x_2 がみつかったとき、

x：未知。

（$x_1 \neq x_2$,
x_1 は x_2 の定数倍でない。）

$x_1 + x_2$ も微分方程式の解になっている。

② 微分方程式の解を定数倍しても、やはり微分方程式の解になっている。　x が解、cx も解　c：定数。

①と②まとめると.

微分方程式の独立な2つの解 x_1, x_2 がみつかったとき.

C_1 と C_2 を定数として $C_1x_1 + C_2x_2$ も微分方程式の解になっていれば.

その微分方程式は線形微分方程式と呼ばれる.

x_1 と x_2 の重ね合わせ

重ね合わされた解.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (7.5)$$

は 線形微分方程式か? 非線形微分方程式か?

手で解けない!

確かめてみる.

x_1 と x_2 を (7.5) の独立な解と仮定する.

つまり x_1 と x_2 は

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega^2 x_1$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega^2 x_2$$

をみたす. x_1 と x_2 を重ね合わせた $C_1x_1 + C_2x_2$

(ただし C_1, C_2 は定数とする) も (7.5) の解になって

いるか確かめる.

$$\frac{d^2}{dt^2}(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

$$= c_1 \times (-\omega^2 x_1) + c_2 \times (-\omega^2 x_2)$$

$$= -\omega^2 (c_1 x_1) \div \omega^2 (c_2 x_2)$$

$$= -\omega^2 (c_1 x_1 + c_2 x_2)$$

つまり $c_1 x_1 + c_2 x_2$ は (7.5) をみたしている.

以上から (7.5) は線形微分方程式である.