第4章　数学の話題：ベクトルの微分.

4.1　(スカラー) 微分の復習.

自然な拡張

4.2　ベクトルの微分

体ケイ.

4.3　変位, 速度, 加速度 … 物理学に上記の数学的概念を適用したもの.

4.1　微分の復習.

t : 実数の変数　(物理学では時間を想定)

t の関数 $f(t)$ … スカラー量

例　$f(t) = \sin \omega t$
$f(t) = \cos \omega t$
$f(t) = at^2 + bt + c$
$f(t) = e^{\alpha t}$
⋮

f を t に関して微分する.

記号.　$\dfrac{df(t)}{dt}$ 又は $\dfrac{df}{dt}$

f' : 高校生 ×

定義：具体的にどう計算するのか？ 約束事.

$$\boxed{\frac{df(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}$$

定義が重要！

定義 （合同でない.）
を表わす記号.

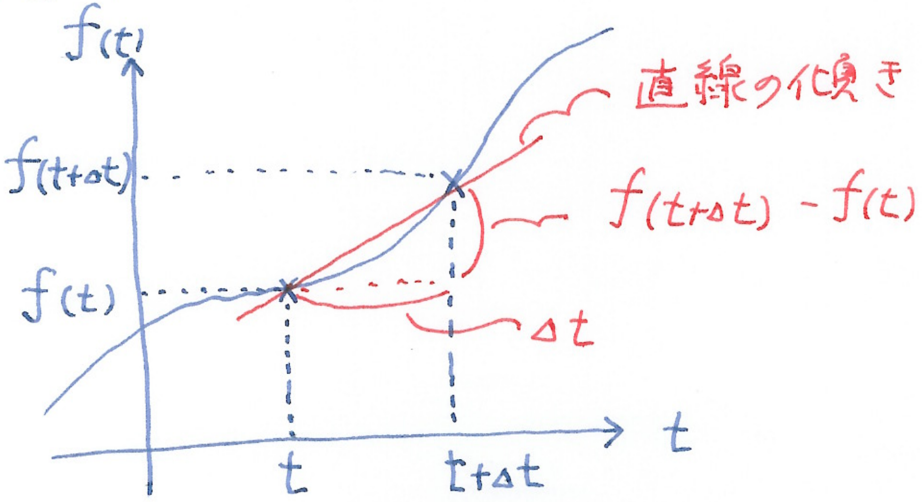
例

$$f(t) = e^t \rightarrow \frac{df}{dt} = e^t$$

$$f(t) = \sin \omega t \rightarrow \frac{df}{dt} = \omega \cos \omega t$$

ヒンパンに登場するので記憶しているが，実は上の定義に従って計算すると導びける.

微分の意味. ：定義に立つかえればよい.



$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

4.2 ベクトルの微分.

どうやって定義するか？

t : 実数の変数　　時間を想定.

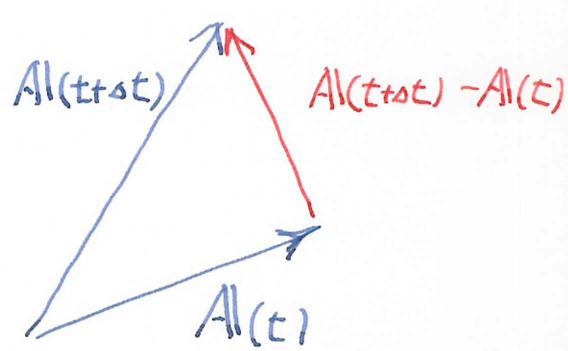
t の関数としてのあるベクトル $\mathbb{A}(t)$

$\mathbb{A}$ の大きさが t によって変化

$\mathbb{A}$ の方向も t によって変化　する.

$\mathbb{A}(t)$ の t に関する微分

$$\boxed{\frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{A}(t+\Delta t) - \mathbb{A}(t)}{\Delta t}}$$



$\frac{d\mathbb{A}}{dt}$ は ✗ スカラー ？

~~ベクトル~~ ？

✗ テンソル ？

具体的な計算（デカルト座標で分解した場合）

~~デカト~~ デカルト座標系で $\mathbb{A}$ を分解

$$\mathbb{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}.$$

A_x, A_y, A_z : 成分
スカラー

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: 単位ベクトル

$$\frac{d\mathbb{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}\right)$$

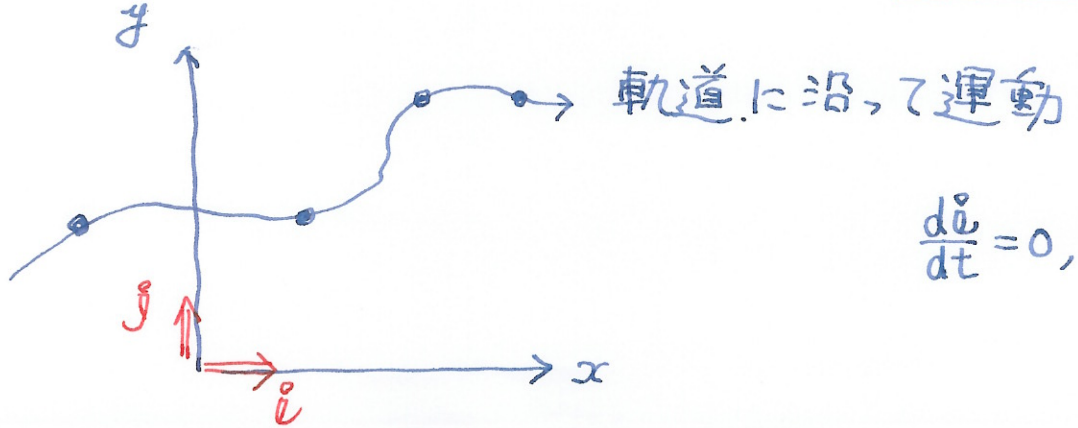
$$= \frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + A_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j} + A_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k} + A_z\frac{d\mathbf{k}}{dt}.$$

$$= \left(\frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k}\right) + \left(A_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right)$$

連鎖律

$$\frac{d}{dt}(f\,g) = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt}$$

デカルト座標系　$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ が固定されている. 時間に依存しない.



$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = 0,\quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = 0,\quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0$$

→ デカルト座標系では.

$$\frac{d\mathbb{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dA_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dA_z}{dt}\boldsymbol{k}$$

となる.

スカラー

つまり $\mathbb{A}$ の $\boxed{\text{各成分}}$ だけを微分したベクトルになっている.

一般の座標系で $\mathbb{A}$ を分解したときは

$\frac{d\mathbb{A}}{dt}$ には 単位ベクトルの微分も 寄与するので注意が必要

↓

振り子の運動(2次元極座標系で記述.)

Chap 7 ?

$\frac{df}{dt}$ … 分数でない.

呼び方　ディーエフ　ディーティ.

同じ意味. $\frac{d}{dt}f$

この記号でひとまとまりで,
この記号の後ろにくる関数をtで微分する.

f'' … fの2階微分
f'の1階微分
} 高校生.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right) = \boxed{\frac{d^2f}{dt^2}}$$

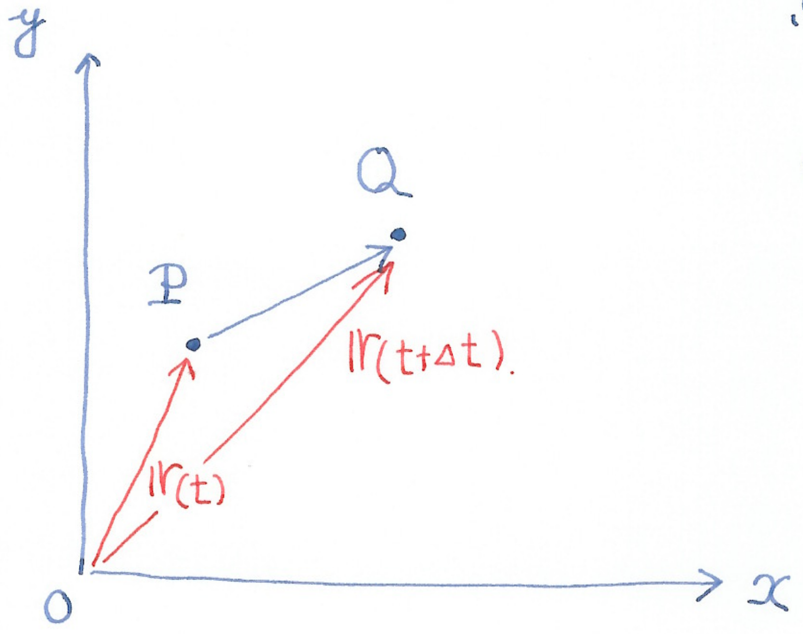
fのtに関する2階微分を表わす記号.

4.3 変位，速度，加速度.

速度 … ベクトル

速さ … スカラー（~~ベクトル~~速度の大きさ）.

例：2次元で説明



点P：質点が時刻 t で存在

点Q：〃 $t+\Delta t$ で存在

Δt 秒間の平均の速度は？

速さ：PQ間のキョリを Δt で割ったもの

方向：Pを始点，Qを終点とするベクトルの向き.

数学的に表現.

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbb{r}(t+\Delta t) - \mathbb{r}(t).$$

$$(\Delta t\text{ 秒間の平均の速度}) = \frac{\mathbb{r}(t+\Delta t) - \mathbb{r}(t)}{\Delta t}$$

$$(\text{時刻}\ t\ \text{の瞬間の速度}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{r}(t+\Delta t) - \mathbb{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\mathbb{r}(t)}{dt}.$$

つまり．速度 $\mathbb{v}(t)$ は 位置ベクトル $\mathbb{r}(t)$ の t に関する微分で与えられる．

$$\mathbb{v}(t) = \frac{d\mathbb{r}(t)}{dt}.$$ ： 位置(ベクトル)変化の割合とも~~に~~解釈．

加速度（速度の変化の割合）
└ $\mathbb{a}$

$$\mathbb{a}(t) = \frac{d\mathbb{v}(t)}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbb{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2}$$ …位置ベクトルの t に関する2階微分になる．

まとめ

位置ベクトル

$\downarrow$ tで微分

速度

$\downarrow$ tで微分

加速度

デカルト座標系で $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$ を分解.

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \quad \cdots(1)$$

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k} \quad \cdots(2)$$

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k} \quad \cdots(3)$$

各成分の関係は？

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad \cdots(4)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} \quad \cdots(5)$$

(2) = (4) より

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

(5) = (3) より

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

演習問題.

高校の物理で登場した様々な状況下での

位置
速度
加速度

の公式が互いに微分により関係付けられていること

を確かめる.

主目的.

これを覚えなさい
覚える必要がある

ということを述べているわけではない