前回の話.　第10章　エネルギー保存則

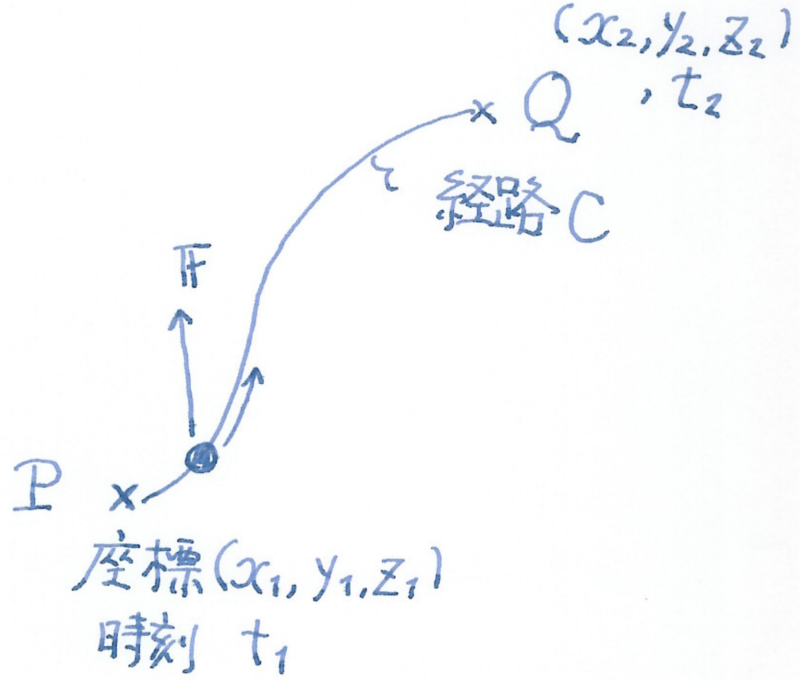
第9章で導入した線積分 ⟶ 力学に適用.

☆ 運動方程式　$m\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$　を線積分する.

$$\underbrace{\int_C m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\overset{\text{内積}}{\cdot} d\mathbf{r}} = \underbrace{\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}_{\text{仕事}\,:\,W}$$

変形 ↓

$$\int_{t=t_1}^{t_2} d\underbrace{\left(\frac{1}{2}m v^2\right)}_{\text{運動エネルギー}:\,T(t)}$$



$$\boxed{T(t_2) - T(t_1) = W}$$ ← 重要な結果

☆ さらに もし 力 $\mathbf{F}$ が $U\underbrace{(x, y, z)}_{\text{質点の位置で決まる.}}$ の勾配として書ける場合

$\mathbb{F} = -\nabla U$ … $\mathbb{F}$: 保存力

U : ポテンシャル（高校では位置エネルギー呼ばれていた）

$$W = \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = -\int_C \nabla U \cdot d\mathbb{r} = -\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} dU = \underbrace{-U(x_2, y_2, z_2) + U(x_1, y_1, z_1)}_{\text{ポテンシャルの差}}$$

結局

$$T(t_2) - T(t_1) = -U(x_2, y_2, z_2) + U(x_1, y_1, z_1)$$

又は

$$\boxed{\underbrace{T(t_2) + U(x_2, y_2, z_2)}_{\text{終点の力学的エネルギー}} = \underbrace{T(t_1) + U(x_1, y_1, z_1)}_{\text{始点の力学的エネルギー}}}$$

力学的エネルギー保存則

$T + U$: 運動エネルギーとポテンシャルの和で力学的エネルギー

今日の話.

力学的エネルギー保存則 の 別の導出の仕方

こちらの方法の方が標準的.
線積分を使わない.

そのための準備.

1. ポテンシャルの不定性.

ポテンシャル U の定義 : 力と $\mathbb{F} = -\nabla U$ の関係をみたすもの.

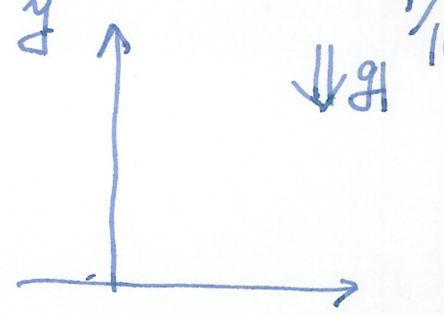
U に, ある定数 U_0 を加える.
それを U' とする : $U' \equiv U + U_0$

$$-\nabla U' = -\nabla(U+U_0) = -\nabla U - \underbrace{\cancel{\nabla U_0}}_{\text{ゼロ}} = \mathbb{F}$$

U からも U' からも同じ力 $\mathbb{F}$ が導びける

U_0 をどう選ぶか?
基準を定めておいて, そこで $U=0$ となるように U_0 を決める.

具体的 1　　$U = \underline{mgy}$



$\uparrow$

$\left\{ \begin{array}{l} y=0\text{の所で}\ U=0 \\ \text{となるように}\ U\text{を決めて} \\ \text{いる.} \end{array} \right\}$

$U' = mg(y + y_0)$

$-\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} = -mg\mathbf{j}$ …… 鉛直下向きの重力が出てくる.

$-\nabla U' = -mg\mathbf{j}$. ……

2. ポテンシャルの時間微分.

$U(\underline{x, y, z})$
位置だけの関数.

質点の位置 … 時間と共に変わる

$= U(x(t), y(t), z(t))$ … x, y, z を通じて時間に依存する

$\frac{dU}{dt}$ … ?

$= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}$ … あたかも合成関数の微分と同じ

$$f(y), \quad y = y(x) \qquad \frac{df}{dx} = \frac{df}{\cancel{dy}}\frac{\cancel{dy}}{dx}$$

$$= \nabla U \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \nabla U \cdot \mathbf{v} \qquad \cdots \ (10.15)$$

10.4 具体例 $\longrightarrow$ 省略

線積分を使った力学的エネルギー保存則の導出.

10.5 力学的エネルギー保存則の別の導出方法.

ギロンの出発点　運動方程式

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

力 $\mathbf{F}$ はポテンシャル U から導びかれる場合を考える.

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla U \qquad \cdots \ (10.18)$$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ (= $\mathbf{v}$: 速度) と (10.18) との内積を計算する.

$$\underline{m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}} = -\nabla U\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right).$$

実際に

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2}m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} + \frac{1}{2}m\,\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$= m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}$$

$$= \underline{m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}}$$

$$(\text{右辺}) = -\frac{dU}{dt}$$

まとめると

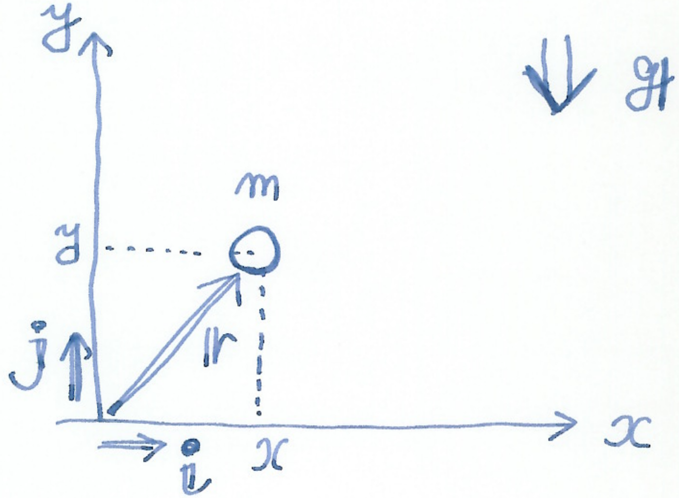
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right) = -\frac{dU}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U\right) = 0} \quad \cdots (10.21)$$

$\underbrace{\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2}_{\text{運・エ}} + \underbrace{U}_{\text{ポテンシャル}}$ は時間に依存しない定数であることを述べている

… 力学的エネルギー保存則を表わしている.

具体例 1.　第6章でやった一様な重力場中の物体の運動



$$\mathbb{g} = -g\,\mathbb{j}$$

$$\mathbb{r} = x\,\mathbb{i} + y\,\mathbb{j}.$$

運動方程式

$$m\frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2} = -mg\,\mathbb{j} \quad \cdots \quad (10.22)$$

$\dfrac{d\mathbb{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\mathbb{i} + \dfrac{dy}{dt}\mathbb{j}$ と (10.22) との内積

$$m\frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\mathbb{r}}{dt} = (-mg\,\mathbb{j})\cdot\frac{d\mathbb{r}}{dt}$$

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\underbrace{\frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right)}_{\text{運動エネルギー}}\right\}$$

… お決まりの変形

$$(\text{右辺}) = (-mg\underline{\underline{j}})\cdot\left(\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}\underline{\underline{j}}\right)$$

$$= -mg\frac{dy}{dt} = -\frac{d}{dt}(mgy).$$

以上まとめると

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)\right\} = -\frac{d}{dt}(mgy).$$

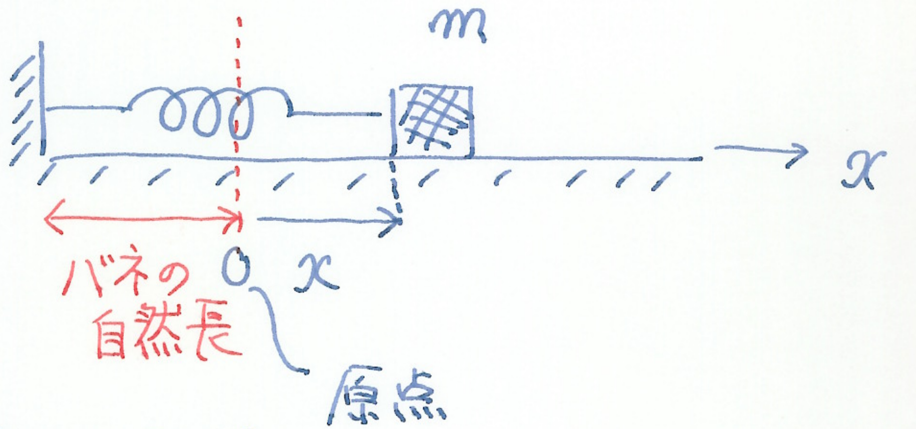
又は

$$\frac{d}{dt}\left\{\underbrace{\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)}_{\text{運動エネルギー}} + \underbrace{mgy}_{\text{ポテンシャル}}\right\} = 0$$

（$y=0$ でポテンシャルはゼロ.）

力学的エネルギー　$\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)+mgy$ は時間に依存しない定数である！

具体例 2　バネにつながれた物体の運動



物体に働く力

バネの復元力のみ

$$\mathbf{F} = -kx\,\mathbf{i}$$

位置ベクトル，速度

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} \quad , \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} = v_x\,\mathbf{i}.$$

運動方程式

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -kx\,\mathbf{i}.$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} = -kx\,\mathbf{i}. \quad \cdots\cdots \quad (10.25)$$

(10.25) と速度 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}\left(= \frac{dx}{dt}\mathbf{i}\right)$ との内積を求める.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i}\cdot\frac{dx}{dt}\mathbf{i} = -kx\,\mathbf{i}\cdot\frac{dx}{dt}\mathbf{i}.$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} = -kx\frac{dx}{dt}$$

(左辺) $= \dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2\right\} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m v_x^2\right).$ お決まりの計算

(右辺) $= \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{2}kx^2\right)$

確認

$$\left(\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{2}kx^2\right) = -\cancel{\dfrac{1}{2}}\cdot k\cdot\cancel{2}\cdot x\cdot\dfrac{dx}{dt} = -kx\dfrac{dx}{dt} \right)$$

まとめると.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v_x^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

又は

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}m v_x^2}_{\text{運動エネルギ}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\text{バネの復元力によるポテンシャル}}\right) = 0} \quad \cdots (10.27)$$

$\underbrace{x=0}_{\text{自然長のとき.}}$ でポテンシャル0（ゼロ）

力学的エネルギー $\dfrac{1}{2}m v_x^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$ は時間に依存しない定数である!