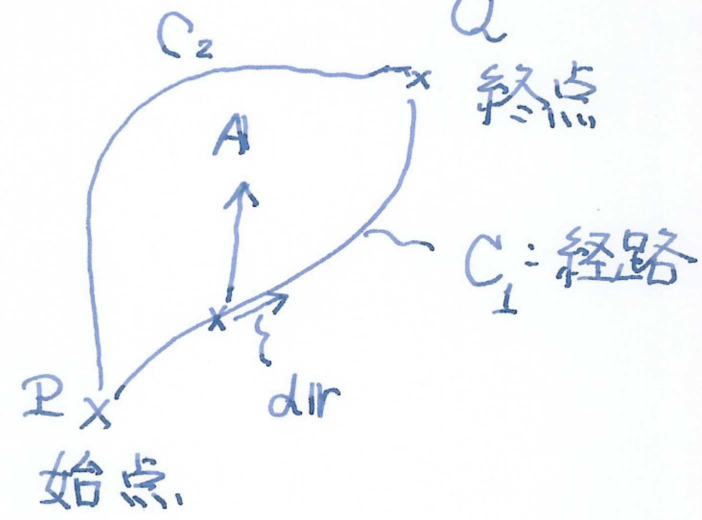
前々回，前回の話.

線積分.　ベクトル $\mathbb{A}$ をある始点から終点まで経路に沿って積分する



$$\int_{C_1} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} \neq \int_{C_2} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}$$

★ 線積分は経路が異なると結果が変わる

★ ただし　$\mathbb{A} = \nabla f$　$\mathbb{A}$ がスカラー関数 f の勾配で書けるとき.

$$\int_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_C \nabla f\cdot d\mathbb{r} = \int_P^Q df = \underbrace{f(Q) - f(P)}$$

始点における f と終点における f との差
経路によらない!

今日の話・前々回，前回の話を力学に適用する

$\mathbb{A}$：ベクトル $\longrightarrow$ $\mathbb{F}$：力

$\int_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}$ $\longrightarrow$ $\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$：仕事.

$\mathbb{A} = \nabla f$ $\longrightarrow$ $\mathbb{F} = -\nabla U$

U：ポテンシャル（位置エネルギー）.

エネルギー保存則を運動方程式から導く.

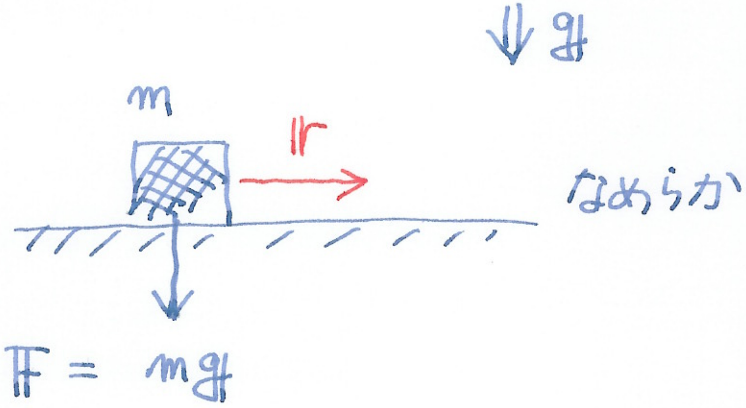
第10章 エネルギー保存則

10.1 仕事

10.1.1 定義

ある一定の力 $\mathbb{F}$ の作用のもと，物体が $\mathbb{r}$ だけ動いたとき. $W \equiv \mathbb{F}\cdot\mathbb{r}$ を力が物体にした仕事と定義する.

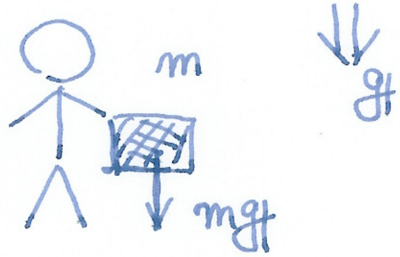
内積



$\mathbb{F} \perp \mathbb{r}$

$\underline{W = 0}$

力と物体の移動の方向が垂直のとき.



$|\mathbb{r}| = 0$

$\underline{W = 0.}$

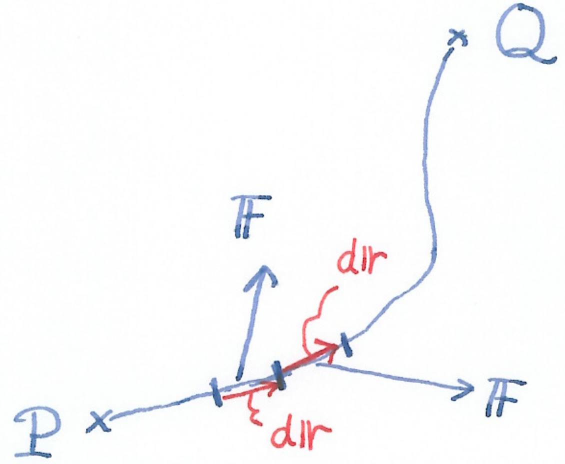
物体は移動していない.

一般化

力 $\mathbb{F}$ が、時間・空間に依存した関数 $\mathbb{F}(x, y, z, t)$ 場合に 物体が 始点 P から 終点 Q まで、ある経路 C に沿って移動したとする.

$$\boxed{W \equiv \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}}$$

$\mathbb{F}$ の C に沿う線積分で $\mathbb{F}$ が物体にした仕事を表わせる.



10.1.2 仕事の次元, 単位.

定義によると　$W = \mathbb{F} \cdot \mathbb{r}$

$$[W] = \underset{力}{[F]} \cdot \underset{長さ}{[L]}$$

$$= (M\, L/T^2) \cdot L = M\,(L/T)^2$$

$$= \underline{(質量)(速さ)^2}$$

$\frac{1}{2} m v^2$
運動エネルギー

仕事の次元　…　エネルギーの次元と同じ

MKS単位　　$\underline{kg\,(m/s)^2} \equiv \underline{\underline{J}}$ (ジュール)

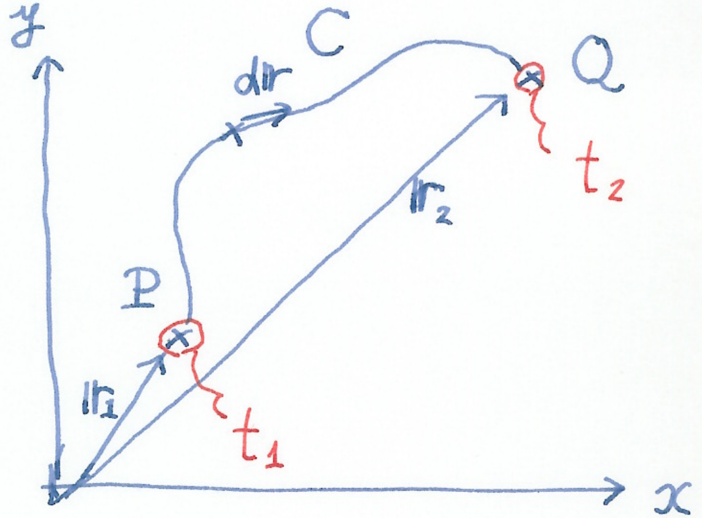
10.2 運動方程式の(線)積分.

運動方程式

$$m \frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2} = \mathbb{F} \quad \cdots (10.5)$$

(10.5)を 始点 P (位置ベクトル $\mathbb{r}_1$) から 終点 Q (位置ベクトル $\mathbb{r}_2$) まで, ある経路 C に沿って線積分する.

$$\underline{\int_C m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot d\mathbf{r}} = \underbrace{\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}_{\text{Fが物体にした仕事 } W} \quad \cdots(10.6)$$



$\mathbf{r}$：位置ベクトル，tの関数　$\mathbf{r}(t)$.

$$\int \cdots \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{r}\text{についての積}}}{\underline{d\mathbf{r}}} = \int \cdots \underset{\substack{\uparrow\\ t\text{についての積分}}}{\underline{dt}}$$

$$\underline{d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ ： 速度}$$

変数変換.

(10.6)の左辺

$$\int_C m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot d\mathbf{r} = \int_C m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_C m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}\,dt$$

さらに $\underline{\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}}$ の変形を計算.

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) \underset{\text{連鎖律}}{=} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \underset{\text{内積は可換}}{=} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}$$

$$= 2\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)$$

$$\{(10.6)\text{の左辺}\} = \int_C \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)dt$$

$$= \int d\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$= T(t_2) - T(t_1)$$

始点における運動エネルギー
と終点における運動エネルギーの差

$\boldsymbol{v}^2$ とも書く.

$$\frac{1}{2}m\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} \equiv T(t)$$

↓

運動エネルギー

運動の激しさを表わす示標の1つ

以上まとめると.

運動方程式を線積分すると

$$T(t_2) - T(t_1) = W \quad \cdots (10.10)$$ に対応する式.

「力が物体に仕事をするとその分だけ運動エネルギーが変化する.」

10.3 エネルギー保存則.

もし力 $\mathbb{F}$ が次のような関係を満たす場合

$$\mathbb{F} = - \nabla U \quad \cdots (10.11)$$

Uで表わされるポテンシャルの坂を下る方向を向いている.

このような力を保存力と呼んだり
ポテンシャルから導びかれる力と呼んだりする.

$U(x, y, z)$ スカラー関数でポテンシャルと呼ばれている.

位置だけの

→ 高校のときは位置エネルギーと呼んでいた.

(∇f 　 f で表わされる地形の傾き(勾配)で坂を上る方向を向く ベクトル)

保存力が働いている場合 (10.6) の右辺は次のように変形できる.

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_C -\nabla U \cdot d\mathbb{r} = -\int_C dU$$

$$= -\Big[U\Big]_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$= \underbrace{-U(x_2,y_2,z_2) + U(x_1,y_1,z_1)}_{\text{始点における }U\text{ と終点における }U\text{ の差.}}$$

(10.10)に戻ると

$$T(t_2) - T(t_1) = -U(x_2,y_2,z_2) + U(x_1,y_1,z_1)$$

$$\boxed{T(t_2) + U(x_2,y_2,z_2) = T(t_1) + U(x_1,y_1,z_1)} \quad \cdots(10.13)$$

力学的エネルギー

$T+U$: 運動エネルギーとポテンシャルの和

(10.13)は(始点における力学的エネルギー)=(終点における力学的エネルギー)を述べており, 力学的エネルギーは運動の間変わらないこと(力学的エネルギー保存則)を述べている.