前回の話.

第9章　数学的な話題.

1. 内積　：　ベクトル（$\mathbb{A}$）とベクトル（$\mathbb{B}$）の掛け算の1つ.

結果がスカラーになる.

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$$

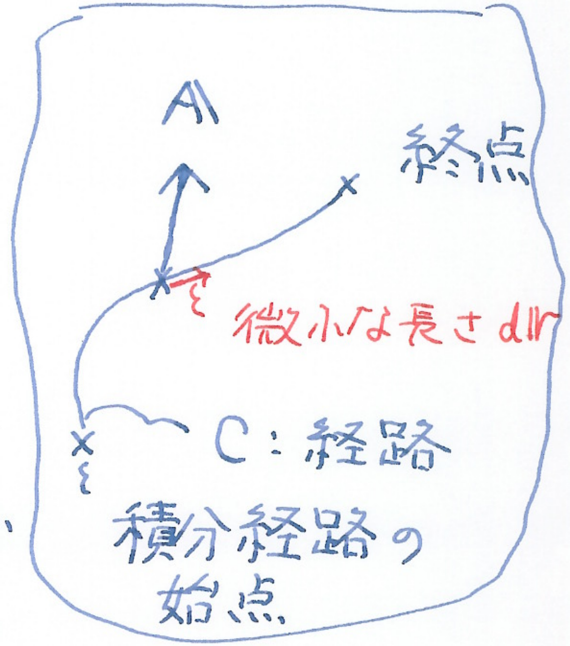
太字　内積記号　太字.

2. 線積分　：　ベクトルの積分

$$\cancel{\int A\cdot dr}$$

$$\int_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}$$

ベクトル　内積　経路に沿う微小なベクトル



この結果はスカラー，始点と終点が同じでも経路が異なると結果の値が異なる

一方で，… 宿題では異なる経路でも結果が同じ場合がある.

線積分の結果が経路に依存しない場合
→ 被積分関数のベクトルがある性質をみたす
場合にこのようなことが起こる.

偏微分, 全微分, 勾配 (勾配演算子)
… について解説する.

8.3 偏微分 (partial derivative)

今までやってきた微分 … 常微分 (ordinary derivative)
1変数関数の微分

$f(x)$, $\dfrac{df}{dx}$ ← fをxに関して微分する.

偏微分 … 多変数関数(2変数以上)の微分
以下では2変数関数 $f(x,y)$ で説明.

fをxに関して偏微分する

デル エフ デル エックス

∂

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

一定に保って.又は定数とみなす

定数とみなす変数を添字として書く場合がある.

fをyに関して偏微分する.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \equiv \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

一定と保って.
又は
定数とみなして.

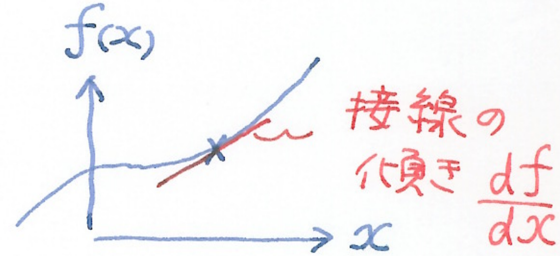
例: $f = x^2 y$.

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2xy$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = x^2$

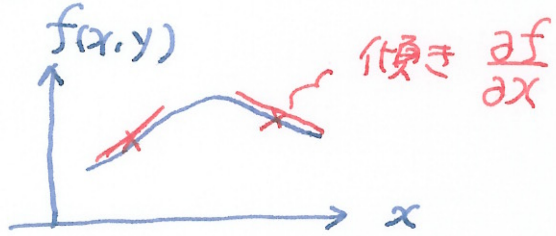
$f = x$.

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 1$. $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 0$.

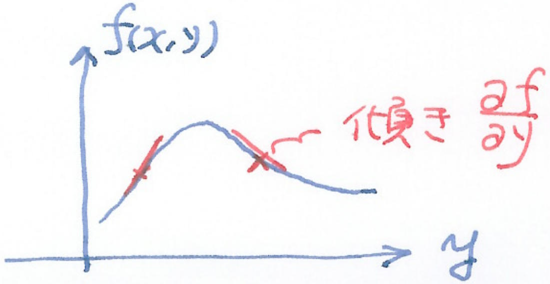
意味: (常微分はグラフの傾き.)

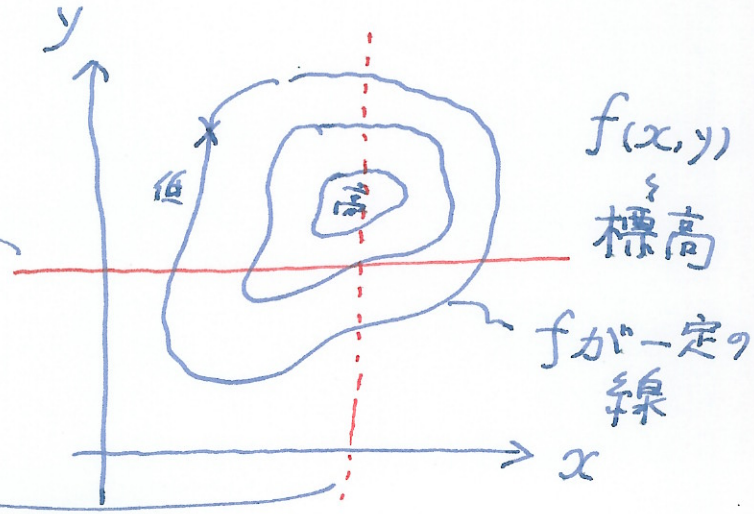


あるyでみると



あるxでみると





8.4 全微分 (total derivative)

多変数関数の微分. (2変数関数で説明) $f(x,y)$

全ての変数に関して微分する

$$df \equiv f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$\equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy \quad \cdots (8.11)$$

$$\boxed{f(x): \quad df = \frac{df}{dx} dx}$$

8.5 勾配演算子.

ナブラ $\nabla \equiv \boldsymbol{i} \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial}{\partial y} \left(+ \boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \cdots (8.13)$

太字ぽく

この記号の後ろに付く多変数関数を微分する, という記号で

ただし ベクトル のようなモノ

デカルト座標系の単位ベクトル

例えば スカラー関数 $f(x,y)$

$$\nabla f = \boldsymbol{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial f}{\partial y} \quad \cdots \text{ベクトル} \quad \cdots (8.15)$$

fの勾配

ベクトル関数 $\mathbb{A}(x, y)$

$$\underline{\mathbb{\nabla} \cdot \mathbb{A}} = \left(\mathbb{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbb{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(A_x \mathbb{i} + A_y \mathbb{j} \right)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \quad \cdots \text{スカラー}$$

$\mathbb{A}$の発散.

$$\mathbb{\nabla} \times \mathbb{A} = \cdots \quad \cdots \text{ベクトル}$$

$\mathbb{A}$の回転.

$\mathbb{\nabla}$が出てくるある関数の微分は上記の3種類だけ.

(8.15)と($\mathbb{r}$の微分長さ $d\mathbb{r}$)との内積.

$$(\mathbb{\nabla} f) \cdot d\mathbb{r} = \left(\mathbb{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbb{j} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \left(dx\, \mathbb{i} + dy\, \mathbb{j} \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$= df. \quad \cdots (8.16)$$

fの全微分

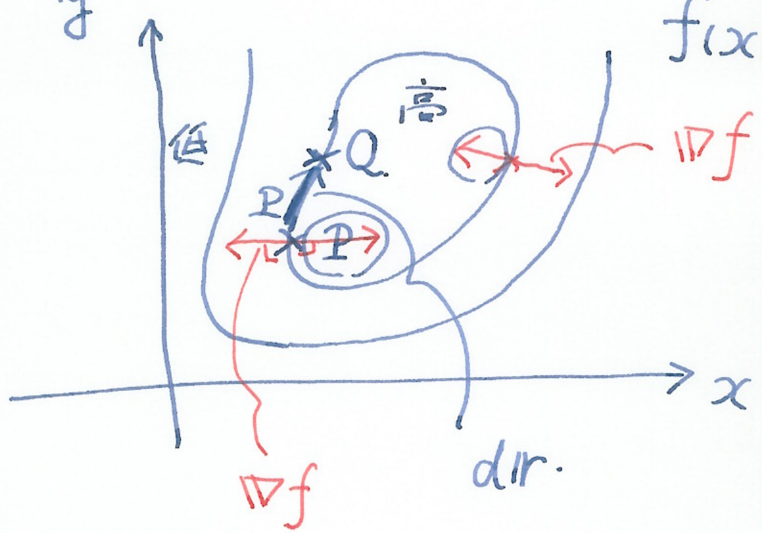
点 P, Qは fの同じ値の上にある.
　　　　　　　等値線

$\underbrace{P \to Q}_{\text{長さは微小}}$ に向かうベクトル $d\mathbf{r}$

$$df = f(Q) - f(P) \quad \downarrow (8.16)$$

$$= (\nabla f) \cdot d\mathbf{r}$$

$$= 0 \quad \because f(P) = f(Q)$$



$(\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0.$ … $\underbrace{\nabla f}_{\text{等値線に垂直で値が増大する方向を向く.ベクトル}}$ と $\underline{d\mathbf{r}}$ は垂直

↑ 等値線に沿う方向

具体例. $f(x, y) = x^2y + x + y^2$

∇f を計算する

$$\nabla f = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y.$$

したがって

$$\nabla f = (2xy + 1)i + (x^2 + 2y)j.$$

講義ノート P.72 の A と同じ

ベクトル
皆さんが前回の宿題で線積分した関数.

…それはあるスカラー関数 f の勾配として書けるモノだった.

8.6 線積分再訪.

被積分関数 A が、あるスカラー関数 f の勾配で与えられる場合.

線積分する

$$\int_C \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r} = \int_C \underline{(\nabla f) \cdot d\mathbb{r}}$$

$$= \int_C df = \underline{f(C\text{の終点}) - f(C\text{の始点})}$$

始点と終点の値だけて決まって．途中の経路の形によらない．

宿題に戻ると

$$\int_C \{(2xy+1)\mathbb{i} + (x^2+2y)\mathbb{j}\} \cdot d\mathbb{r}$$

$$= \int_C \nabla(x^2y + x + y^2) \cdot d\mathbb{r}$$

$$= \int_C d(x^2y + x + y^2) = \Big[x^2y + x + y^2\Big]_{C\text{の始点}\ (0,0)}^{C\text{の終点}\ (1,1)}$$

$$= (1+1+1) - 0$$

$$= 3 /\!/$$

$$\mathbb{\nabla} = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\mathbb{\nabla} f = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f\mathbb{\nabla} = \boldsymbol{i}\, f\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\, f\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\mathbb{\nabla} f \neq f\,\mathbb{\nabla}$$

講義ノート
P.74.

注意. 微分記号と関数の
順序を交換すると
意味が変わる.

$$fg = gf$$

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\cdot\mathbb{A}$$