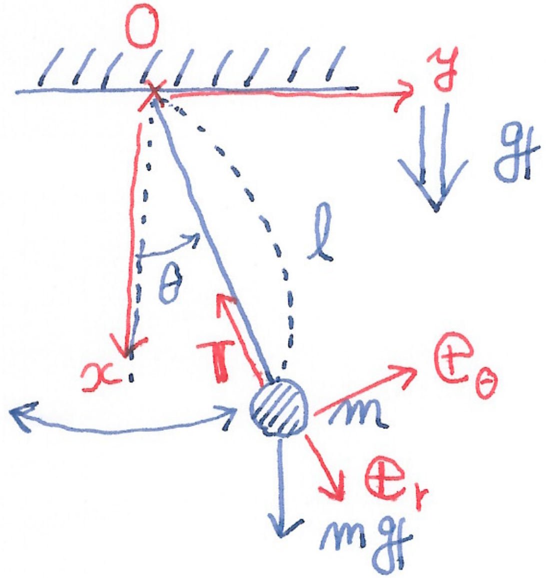
前回の話.

調和振動子(その2) 振り子の運動



ベクトル形式の運動方程式

物体の位置ベクトル $\mathbf{r}$

質量 m, ひもの張力 $\mathbf{T}$

$$\boxed{m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} + \mathbf{T}}$$

$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$

2次元極座標系

動径方向　単位ベクトル $\mathbf{e}_r$

方位角方向　〃　$\mathbf{e}_\theta$

時間に依存して向きがかわる.

2次元極座標系を導入.

その座標系の各成分に運動方程式を分解

$$\boxed{\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta, \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_r}$$

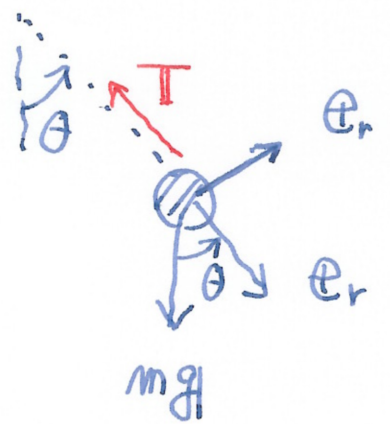
振り子の場合　ヒモの長さ ℓ … 伸び・縮みしない.

$$\mathbb{r} = \ell\, \mathbb{e}_r \qquad \ell: \text{定数}.$$

$$\frac{d\mathbb{r}}{dt} = \ell \frac{d\mathbb{e}_r}{dt} = \ell \frac{d\theta}{dt} \mathbb{e}_\theta$$

$$\frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2} = \ell \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbb{e}_\theta + \ell \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbb{e}_\theta}{dt}$$

$$= \ell \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbb{e}_\theta - \ell \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \mathbb{e}_r.$$



運動方程式

$$\boxed{m\left(-\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \mathbb{e}_r + \ell \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbb{e}_\theta\right) = mg\cos\theta\, \mathbb{e}_r - mg\sin\theta\, \mathbb{e}_\theta - T\, \mathbb{e}_r}$$

（Tはひもの張力の大きさ）

動径方向の運動方程式

$$-m\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - T.$$

移項

$$\underbrace{m\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{\text{遠心力}} + \underbrace{mg\cos\theta}_{\text{重力}} - \underbrace{T}_{\text{張力}} = 0$$

のつり合い!

振り子の問題の未知変数.

方位角 θ のみ

方位角方向の運動方程式

$$\boxed{m l \frac{d^2\theta}{dt^2} = - mg\sin\theta}$$

これを解いて.
$\theta(t)$ として求める.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

非線形微分方程式 … 解ける代表例
ただし複雑.

線形微分方程式 vs 非線形微分方程式

θ_1, θ_2 という独立な解. $\theta_1+\theta_2$ も解になっているか?

$$\frac{d^2(\theta_1+\theta_2)}{dt^2} = \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta_1 - \frac{g}{l}\sin\theta_2$$

$$\neq -\frac{g}{l}\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$$

ふれ角 θ が非常に小さい場合 $|\theta| \ll 1$.

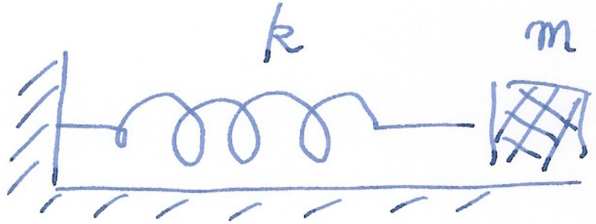
微小(振幅)振動

$\sin\theta \approx \theta$ で近似できる

関数の近似の一般論
テイラー展開.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta}$$

正の量



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x.$$

正の量

同じ型の
微分方程式
解も同じ.

微小振幅振動の振り子の運動は調和振動である.

◎ エネルギー論をしていくために数学的準備が必要.

第9章：数学的話題　ベクトルの掛け算
ベクトルの積分
偏微分

今回と次回

9.1 ベクトルの掛け算：内積.

ベクトルとベクトルの掛け算

← 中黒

2種類　内積(スカラー積) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ … 結果 スカラー

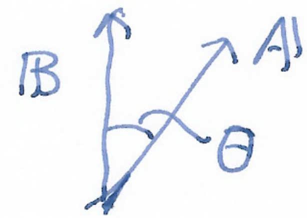
外積(ベクトル積) $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ … 〃 ベクトル

↑ 忘れずにつける.

内積の定義

ベクトル $\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ の内積

$$\boxed{\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \equiv A B \cos\theta}$$



$|\mathbb{A}| = A$
$|\mathbb{B}| = B$

重要な性質.

1. $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\cdot\mathbb{A}$　可換則.

2. $\mathbb{A}$と$\mathbb{B}$が互いに直角なら　$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = 0$.

デカルト座標系の単位ベクトル

$$\mathbb{i}\cdot\mathbb{j} = 0,\quad \mathbb{j}\cdot\mathbb{k} = 0,\quad \mathbb{k}\cdot\mathbb{i} = 0.$$

3. $\mathbb{A}\cdot\mathbb{A} = AA\cos 0 = AA = A^2$

$$A = \sqrt{\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}}$$

$$\mathbb{i}\cdot\mathbb{i} = \mathbb{j}\cdot\mathbb{j} = \mathbb{k}\cdot\mathbb{k} = 1.$$

4. $\mathbb{A} = A_x\mathbb{i} + A_y\mathbb{j} + A_z\mathbb{k}$.

$\mathbb{B} = B_x\mathbb{i} + B_y\mathbb{j} + B_z\mathbb{k}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} &= (A_x\mathbb{i} + A_y\mathbb{j} + A_z\mathbb{k})\cdot(B_x\mathbb{i} + B_y\mathbb{j} + B_z\mathbb{k})\\ &= A_xB_x\,\mathbb{i}\cdot\mathbb{i} + A_xB_y\cancel{\mathbb{i}\cdot\mathbb{j}} + A_xB_z\cancel{\mathbb{i}\cdot\mathbb{k}}\\ &\quad + A_yB_x\cancel{\mathbb{j}\cdot\mathbb{i}} + A_yB_y\,\mathbb{j}\cdot\mathbb{j} + A_yB_z\cancel{\mathbb{j}\cdot\mathbb{k}}\\ &\quad + A_zB_x\cancel{\mathbb{k}\cdot\mathbb{i}} + A_zB_y\cancel{\mathbb{k}\cdot\mathbb{j}} + A_zB_z\,\mathbb{k}\cdot\mathbb{k}\\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\end{aligned}$$

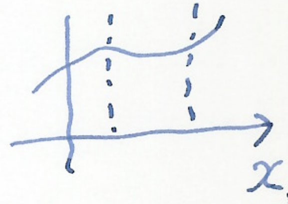
成分どうしかけて和をとる!

9.2. 線積分

被積分関数がベクトル、

多変数関数 →

$$\int \underset{\uparrow\ \text{スカラー}}{\underline{\underline{f}}}(x)\,dx$$



定義. あるベクトル $\mathbb{A}(x,y,z)$ の経路Cに沿っての線積分

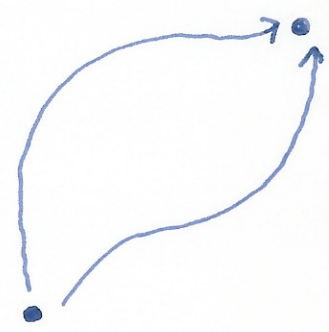
$$\int_C \underset{\uparrow\ \text{ベクトル}}{\underline{\mathbb{A}}} \overset{\text{内積}}{\bullet} \underset{\text{ベクトル}}{\underline{d\mathbb{r}}} = \int_C A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

$$d\mathbb{r} = dx\,\mathbb{i} + dy\,\mathbb{j} + dz\,\mathbb{k}$$ (デカルト座標では)

$$\mathbb{A} = A_x\mathbb{i} + A_y\mathbb{j} + A_z\mathbb{k}$$

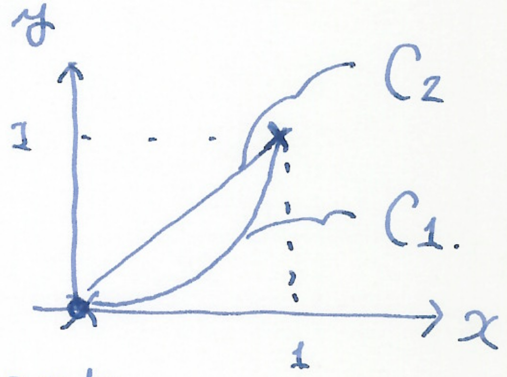
経路によって~~線~~線積分の値がかわる.

積分の始点と終点が同じでも



線積分の具体例.

1. $\mathbb{A} = (3x^2 - 6y)\,\boldsymbol{i} + (3x + 2y)\,\boldsymbol{j}$ を 始点 $(0,0)$ から 終点 $(1,1)$ まで 次の経路に沿って線積分しなさい.



(a) C_1 : 放物線. $y = x^2$

$dy = 2x\,dx$

$$\int_{C_1} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_{C_1} (3x^2 - 6y)\,dx + \int_{C_1} (3x + 2y)\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(3x^2 - 6\overset{x^2}{\cancel{y}}\right) dx + \int_{x=0}^{1} (3x + 2x^2)\cdot 2x\,dx$$

$$= \int_0^1 \underset{-3}{\cancel{9}}\,x^2\,dx + \int_0^1 (4x^3 + 6x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{\overset{-1}{\cancel{9}}}{3}x^3\right]_0^1 + \left[x^4 + 2x^3\right]_0^1 = \overset{-1}{\cancel{3}} + 1 + 2 = \cancel{6}.\ 2$$

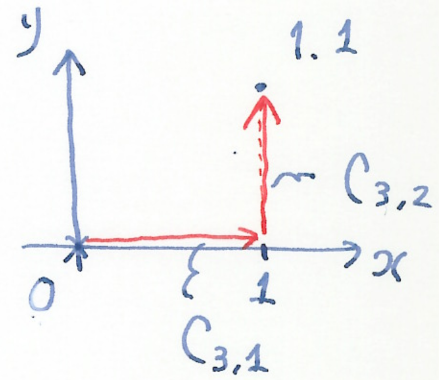
(b) C_2 : 直線 $y = x$.

$$\int_{C_2} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 (3x^2 - 6x)\,dx + \int_0^1 (3x + 2x)\,dx$$

$$= \left[x^3 - 3x^2\right]_0^1 + \left[\frac{5}{2}x^2\right]_0^1 = 1 - 3 + \frac{5}{2} = \frac{2-6+5}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(c) C_3 : $(0,0) \xrightarrow{\text{直線}} (1,0) \xrightarrow{\text{直線}} (1,1)$



$$\int_{C_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_{31}} (3x^2 - 6y)dx + \int_{C_{31}} (3x + 2y)dy$$

$$+ \int_{C_{32}} (3x^2 - 6y)dx + \int_{C_{32}} (3x+2y)dy$$

$$= \int_{x=0}^{1} 3x^2 dx + \int_{y=0}^{1} (3+2y)dy$$

$$= \left[x^3\right]_0^1 + \left[3y + y^2\right]_0^1 = 1 + 3 + 1 = 5$$