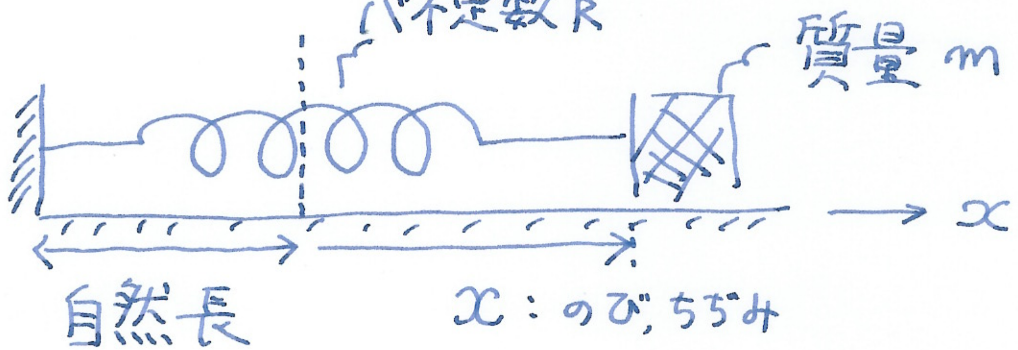
前々回, 前回の話.

調和振動子

時間発展が三角関数で表現できる.

① バネにつながれた物体の運動



水平面内

運動方程式（x成分）

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \longrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x} \quad (*) \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

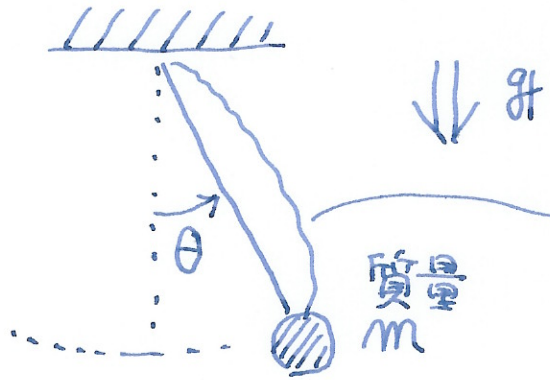
線形微分方程式（解の重ね合わせができる）

解法：推定法.

(*) の一般解 …… $x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ 　 i：純虚数

C_1, C_2：任意定数

第8章　調和振動子（その2）：振り子の運動.



ひもの長さ l.

振り子の運動方程式

（ベクトル形式・・・・）

↓

（成分に分解）

↓ 近似を行なう
θが小さい
微小振動.

過程を解説する.
2次元極座標系の導入

$$\cancel{m l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta}$$

$$\boxed{\cancel{m} l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\cancel{m} g\theta}$$

↓

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\boxed{\frac{g}{l}}\theta$$

正の量
ω^2とおき.

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta} \cdots (*)$$

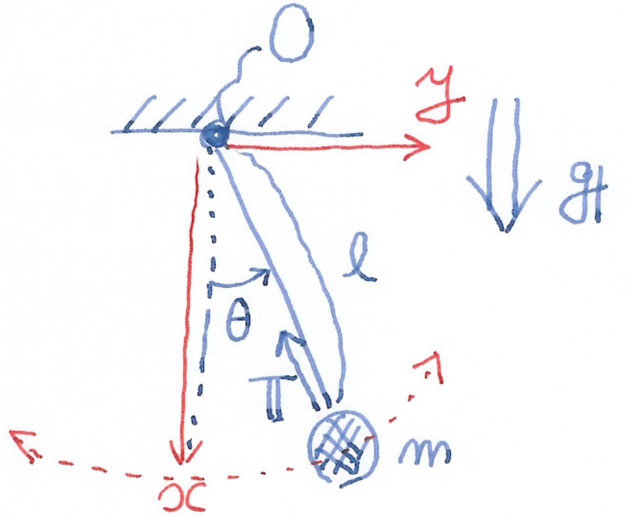
と同じ

方程式が同じなら, 解き方も同じ
解も同じ

$$\theta_{(t)} = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

8.1. 問題設定

- 伸び・縮みしない，長さlで質量を無視できるヒモの片端に，質量mの物体（質点）が結びつけられている．
- 2次元鉛直平面内で，~~ひも~~ヒモの一端を固定して，その一端を支点とする．ヒモがたるまない状態での物体の運動を考える．



座標系．
原点O
便ギ的　デカルト座標．
x軸：鉛直下向
y軸：x軸に垂直．
x軸の左向き．

物体に働く力
重力　mg　　g：重力加速度．
ヒモの張力　T
のみ．

運動方程式(ベクトル形式)　物体の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ としたとき

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m\boldsymbol{g} + \mathbb{T}$$

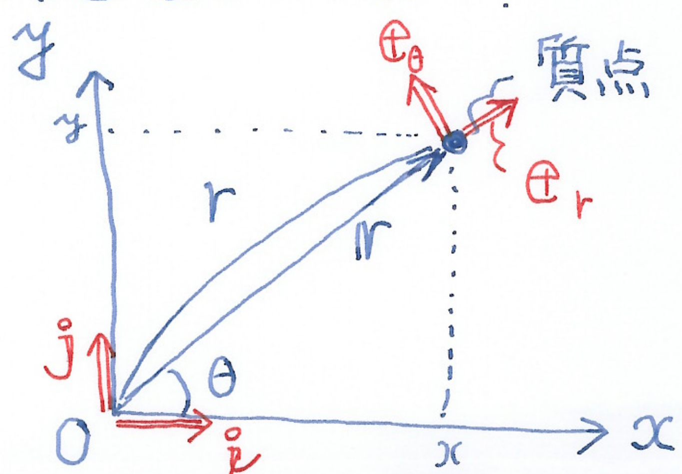
↓　微分方程式として解くとき
座標系の成分(スカラー)に分解して解く

どのような座標系を選ぶか?

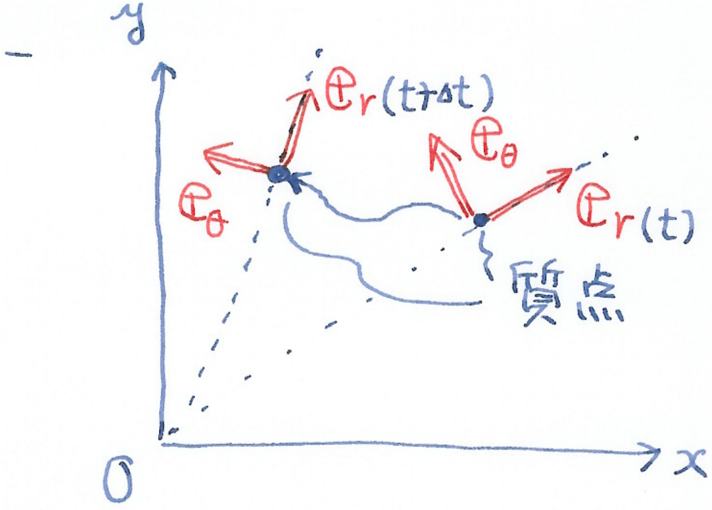
デカルト座標系　x, y … 未知変数 2つ

→ 2次元極座標系　$\underline{\underline{\theta}}$ … 未知変数 1つ
振幅

8.2.　2次元極座標系



Oと質点のキョリ
動径キョリ　r
方位角　θ
の2つを使って表わす座標
動径方向の単位ベクトル：$\boldsymbol{e}_r$
方位角方向の単位ベクトル：$\boldsymbol{e}_\theta$



$\boxed{\text{2次元極座標系の単位ベクトルは、時間と共に向きが変わる!}}$

$\mathbb{i}, \mathbb{j}$ 向きが時間に依存しない
が変わらない.

位置ベクトル の 2次元極座標系における分解

$$\boxed{\mathbb{r} = r\,\mathbb{e}_r}$$

$\mathbb{r}$の時間微分を求めるときに注意が必要

速度 $\mathbb{v}$

微分の連~~続~~鎖律.

$$\mathbb{v} = \frac{d\mathbb{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\mathbb{e}_r) = \frac{dr}{dt}\mathbb{e}_r + r\frac{d\mathbb{e}_r}{dt}$$

これを求める

① 幾何学的に ← 解説

② 計算で ← 宿題

$\mathbb{e}_r$ … イー e の太字に添字 r

$\mathbb{e}_\theta$ … イー e の太字に添字 シータ θ

ベクトルとしての表記.

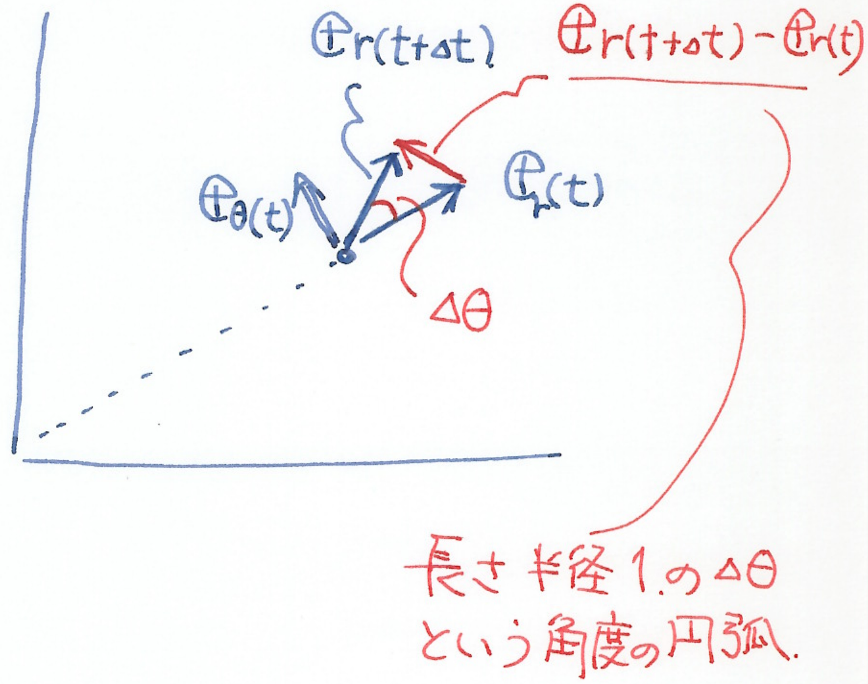
ベクトルの微分の定義 (chap. 4) に従って.

$$\frac{d\mathbb{e}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{e}_r(t+\Delta t) - \mathbb{e}_r(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta \ \mathbb{e}_\theta}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\theta}{dt} \mathbb{e}_\theta$$

つまり $\boxed{\frac{d\mathbb{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbb{e}_\theta}$



$$\boxed{\mathbb{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt} \mathbb{e}_r}_{\text{Oから離れる近づく方向}} + \underbrace{r \frac{d\theta}{dt} \mathbb{e}_\theta}_{\text{Oを中心とした回転}}}$$

加速度. (速度 $\mathbb{v}$ の t に関する微分)

微分の連鎖律を使うと.

$$\mathbb{a} = \frac{d\mathbb{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\mathbb{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbb{e}_\theta\right)$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\mathbb{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbb{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbb{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbb{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\mathbb{e}_\theta}{dt}$$

$$= \frac{d^2 r}{dt^2}\mathbf{e}_r + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\underline{\underline{\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}}}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta \longrightarrow \boxed{\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_r} \right)$$

$\mathbf{e}_\theta$は．$\mathbf{e}_r$を右に見る方向で90°ズレている

$$= \frac{d^2 r}{dt^2}\mathbf{e}_r + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{e}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\mathbf{e}_r.$$

$$= \left\{\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\mathbf{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\mathbf{e}_\theta.$$

以上まとめると．

位置ベクトル：$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$

速度：$\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta$

$v_r = \frac{dr}{dt}$　　$\mathbf{v}$の動径方向成分

$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$　　$\mathbf{v}$の方位角方向成分

加速度： $\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta = \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right\} \mathbf{e}_r + \left\{ 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right\} \mathbf{e}_\theta$

$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ ： $\mathbf{a}$の動径方向成分

$= \frac{dv_r}{dt} - \underline{\underline{\frac{v_\theta^2}{r}}}$ 向心加速度.

$a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ： $\mathbf{a}$の方位角方向成分.