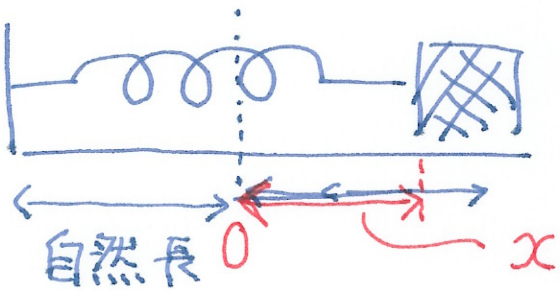
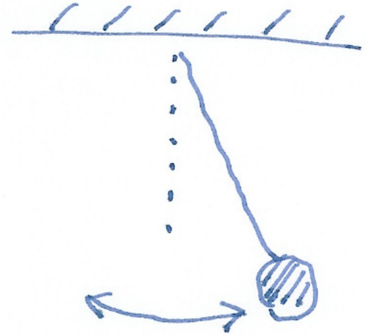
前回の話.

第7章　調和振動子（その1）





バネ定数 k の線形バネにつながれた質量 m の物体の運動を考察.

物体はバネの復元力の作用のみを受ける.

運動方程式（x方向成分）

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx}$$

$k>0$

バネの伸び・縮み（x）に比例

復元（元に戻ろうとする作用）を表現

変形すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$m, k > 0$

$\frac{k}{m} > 0 \Rightarrow \omega$: オメガ

$\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.}$$

解きたい微分方程式

上記の

微分方程式の性質

定数係数. 2階 線形微分方程式

xが未知変数として.

x_1とx_2という独立な解が見つかったとき.

$c_1x_1 + c_2x_2$　（c_1, c_2 : 定数）

も解になっている

解の重ね合わせ

重ね合わされた解.

前回までの話.

7.6 運動方程式の解

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x. \quad \cdots (7.5)$$

"推定法"

(7.5)の解 x を 指数関数と推定する：

$$x_{(t)} = e^{\lambda t} \quad \cdots (7.10) \quad (\lambda：ラムダ \quad 定数)$$

~~とき~~と推定する。 (7.10)が(7.5)をみたすように λ を決める。

$$\frac{dx}{dt} = \lambda e^{\lambda t} = \lambda x.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\lambda x) = \lambda \frac{dx}{dt} = \lambda^2 x.$$

(7.5)に戻って.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \lambda^2 x + \omega^2 x$$

$$= \boxed{(\lambda^2 + \omega^2)x = 0}$$

解も指数関数と推定すると

$x = e^{\lambda t}$

(7.5)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda^2 + \omega^2)\, x = 0$$

線形微分方程式

微分を含まない式

$x = 0$　自明な解
無意味な解

$x \neq 0$　非自明な解

$\Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0$

$\lambda^2 = -\omega^2$

$\lambda = i\omega$ 又は $\lambda = -i\omega$

推定した解にもどすと.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = e^{i\omega t} \quad \cdots \ x_1 \text{に対応} \\ \text{又は} \\ x = e^{-i\omega t} \quad \cdots \ x_2 \text{に対応} \end{array} \right.$$

(7.5) をみたす解が2つ見つかった.

(7.5) が線形微分方程式であるので, 重ね合わされた解

$$\boxed{x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}} \quad (7.12)$$

C_1, C_2 : 任意定数.

も (7.5) の解である.

(7.5) の一般解.

初期条件はここまで使用していない!

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A\frac{dx}{dt} + Bx = 0 \quad \cdots \quad$$ 線形微分方程式

A, B：定数

推定法で解ける。

$x = e^{\lambda t}$ と推定する。

λ を決定する → x_1, x_2 ２つの解が求められる。

x_1 と x_2 を重ね合わせて、一般解 $C_1x_1 + C_2x_2$ を得る。

微分方程式の一般解に含まれる C_1, C_2 は初期条件によって決定される。

初期条件 ： $t=0$ で ~~ま~~ Aだけ伸び・ている又は 縮んでいる。

$x(0) = A$　（$A>0$ 伸び）（$A<0$ 縮み）

$t=0$ 初速度

$v_x = \frac{dx}{dt}$

$v_x(0) = 0$.

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad \cdots (7.5)$$

$$x(0) = \underline{C_1 + C_2 = A.} \quad \cdots (7.13)$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = i\omega C_1 e^{i\omega t} - i\omega C_2 e^{-i\omega t}$$

$$= i\omega \left(C_1 e^{i\omega t} - C_2 e^{-i\omega t} \right) \quad \cdots (7.14)$$

$$v_x(0) = \underline{i\omega (C_1 - C_2) = 0} \quad \cdots (7.15)$$

$(7.15) \rightarrow C_1 = C_2$

$$C_1 + C_2 = C_1 + C_1 = 2C_1 = A \quad \Rightarrow \quad \underline{C_1 = \frac{A}{2}, \quad C_2 = \frac{A}{2}} \quad \cdots (7.16)$$

(7.16) を (7.5) に代入すると.

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{A}{2} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right)$$

Eulerの公式

$$= \frac{A}{2} \left\{ \cos(\omega t) + \cancel{i \sin(\omega t)} + \cos(\omega t) - \cancel{i \sin(\omega t)} \right\}$$

$$= A \cos(\omega t)$$

以上まとめると.

初期条件を満足する 運動方程式の解は

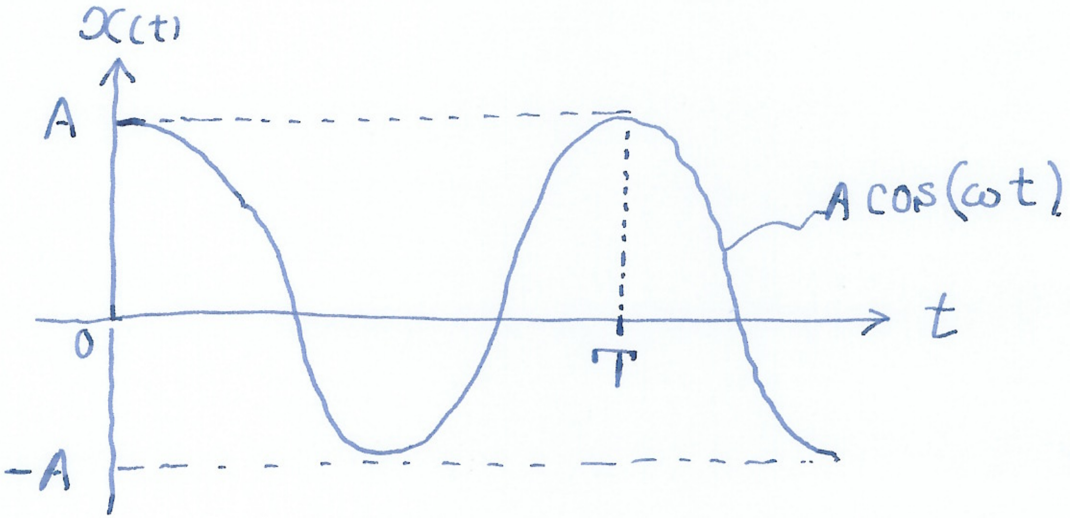
$$x(t) = A\cos(\omega t) \quad \cdots \quad (7.17)$$

であることが導びかれた。 ここで $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$:（振動数.）

1sあたりの振動の回数.

7.7 解の性質

(7.17) を図示. $A>0$ と仮定



$|A|$: 振幅.

T : 周期

$\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi)$ の性質.

$$\cos(\omega t) = \cos(\underline{\omega t + 2\pi})$$
$$= \cos\{\underline{\omega(t+T)}\}$$

$$\cancel{\omega t} + \underline{2\pi} = \cancel{\omega t} + \underline{\omega T}$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}}$$

7.8 議論

初期条件を満足する運動方程式の解

$$x(t) = A\cos(\omega t) \quad \cdots (7.17)$$

一方で x 方向の速度成分 v_x は

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t) \quad \cdots (7.19)$$

$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$ ことに気付くと

$$\cos^2(\omega t) = \left(\frac{x}{A}\right)^2$$

$$+)\ \sin^2(\omega t) = \left(\frac{v_x}{A\omega}\right)^2$$

$$1 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{1}{A^2}\frac{1}{\omega^2}v_x^2$$

$$A^2\omega^2 = \omega^2 x^2 + v_x^2$$

$$\omega^2 = \cancel{\frac{m}{k}}\ \frac{k}{m}$$

$$A^2\frac{k}{m} = \frac{k}{m}x^2 + v_x^2$$

$$\cancel{\frac{k^2}{m^2}A^2 = \frac{k^2}{m^2}x^2 + v_x^2}$$

$\frac{1}{2} \times m^2 \times$

$$\cancel{\frac{1}{2}k^2A^2 = \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1}{2}m^2v_x^2}$$

$k^{-1} \times$

$$\cancel{\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{k}m}$$

$\frac{1}{2}m \times$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_x^2$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}kx(t)^2}_{\text{tに依存}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_x(t)^2}_{\text{tに依存}} = \underbrace{\frac{1}{2}kA^2}_{\text{tに依存しない定数}}$$

バネのポテンシャル　運動エネルギー　定数.

…. エネルギー保存則.

別の方法によるエネルギー保存則の導出は第12回, 13回目の授業で解説する

宿題：授業であつかった初期条件と別の初期条件で調和振動子の問題を解いてみよう.

注：運動方程式, $\underbrace{\text{その一般解}}_{}$ ⟶ 初期条件に依存しない

一般解に含まれる任意定数を決定するときに初期条件が必要.