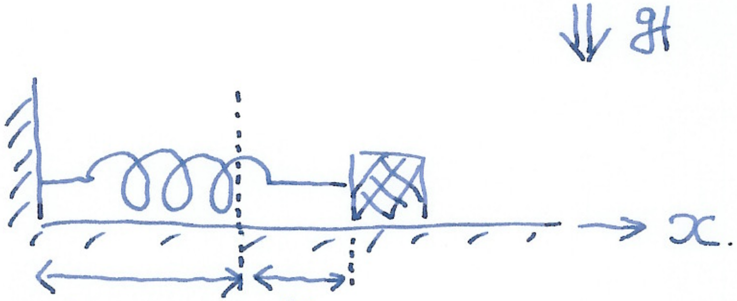
第7章　調和振動子（その1）

第8章



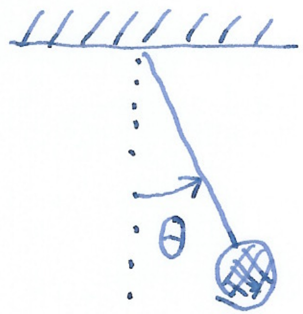
自然長

x

$x > 0$ 伸び

$x < 0$ 縮む.

デカルト座標系



$\Downarrow g$

振り子

ふれ角 $\theta(t)$

ω：オメガ

極座標系

$x(t) \propto \cos(\omega t)$

$\propto \sin(\omega t)$

$\theta(t) \propto \cos(\omega t)$

$\sin(\omega t)$

三角関数で表わされる
発展. 振動

三角関数で表わされる
振動

振動のことを単振動（調和振動）

単振動を起こす系のこと 調和振動子

問題設定.

ベクトル形式で 運動方程式をたてる.

運動方程式を座標系の成分に分解.

各成分の 運動方程式(微分方程式)を解く.

これまで扱ってきた微分方程式と別の型をもった
微分方程式が登場.

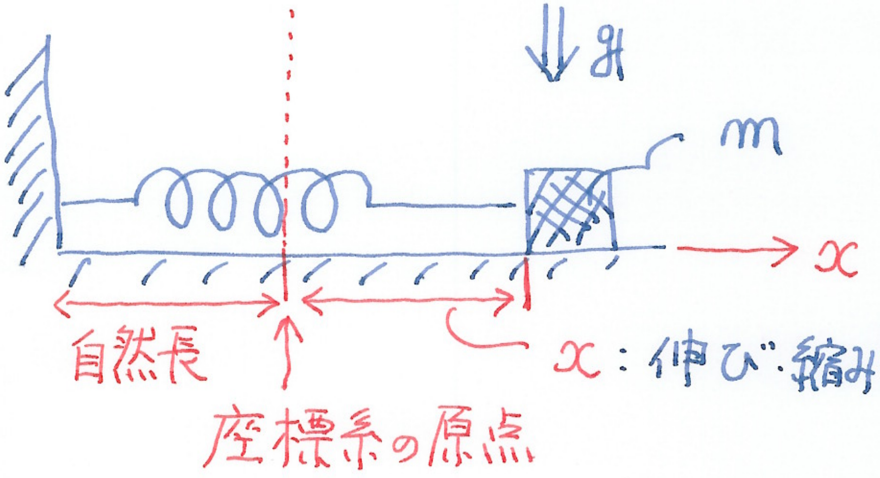
微分方程式の解法.を解説.

7.1. 問題設定

☆ 水平でなめらかなテーブル上で 質量が無視できる
バネ定数 k の線形バネにつながれた 質量 m の物体(質点)
の運動を考える.

☆ 物体に働く力. バネの復元力のみ とする.

$(k > 0.)$



デカルト座標系を採用

$$\mathbb{r}_{(t)} = x_{(t)}\,\mathbb{i}$$

★ xがtの関数として求められればよい

速度 $\mathbb{v} = \dfrac{d\mathbb{r}}{dt}$

$$\mathbb{v} = \underline{v_x}\,\mathbb{i} = \underline{\dfrac{dx}{dt}}\,\mathbb{i}$$

$$v_x = \dfrac{dx}{dt}$$

7.2 言葉の定義・説明

バネが物体に及ぼす力 $\mathbb{F}$.

バネkの線形バネ：$|\mathbb{F}| = k \times$(バネの伸び・縮み)

$= k|x|$

バネkの線形バネが及ぼす<u>復元力</u>：$\underline{\mathbb{F} = -\,kx\,\mathbb{i}}$

元に戻ろうとする力

復元

バネ定数kの線形バネ

$x>0$(伸び)：$\mathbb{F}$はxの負の方向

$x<0$(縮む)：$\mathbb{F}$はxの正の方向

$\boldsymbol{F} = -kx\boldsymbol{i}$

力が伸び.縮みに比例する… フックの法則.

7.3 初期条件.

代表的なもの①: 初期に A だけ伸びた状態から初速度 0 で運動を始める.

$$\boxed{\begin{aligned} x(0) &= A \quad (>0) \\ v_x(0) &= 0 \end{aligned}}$$

授業ではこちらを考える

代表的なもの②: 初期に物体は原点にあり, 初速度 $v_0\boldsymbol{i}$ で運動を始める.

$$\boxed{\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ v_x(0) &= v_0 \end{aligned}}$$

来週出題する演習問題

(今週の演習問題ではない)

7.4 運動方程式.

ベクトル形式 $\boxed{m\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -kx\boldsymbol{i}.}$

成分に分解 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i} = -kx\boldsymbol{i}$

$\rightarrow \boxed{m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx.}$

のちの便利のために 上式を m で割る

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\boxed{\frac{k}{m}}\,x.$$

正の量  $m>0$, $k>0$ と仮定されている

$\omega^2 \equiv \dfrac{k}{m} > 0$ 定義

ω：オメガ

最終的に解きたい微分方程式は $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.}$ $\cdots(7.5)$

~~X 時間 t を $\underline{t}$ と書いている人~~

ベクトル

マチガイ.

7.5 線形微分方程式の性質：重ね合わせ，線形

2階ビブン

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \cdots (7.5)$$

解法のポイント

微分方程式の型・性質を知る.

型に応じて解法が知られている.

(7.5)：定数係数の2階線形微分方程式

大学の授業で何度もくり返し登場.

例えば直接積分すると

$$(\text{左辺})\text{の積分} = \int \frac{d^2x}{dt^2}\,dt = \frac{dx}{dt}$$

$$(\text{右辺})\text{の積分} = -\omega^2 \int x\,dt$$

x が t のどのような関数か知らないと計算できない

↓

この方法では解けない.

ある微分方程式の　2つの独立な解 x_1, x_2 があったとき．

xが解

$\begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ x_1 \text{が} x_2 \text{の定数倍でない} \end{cases}$

① $x_1 + x_2$ も微分方程式の解になっている．

② 解 x の定数倍（c：定数）cx も微分方程式の解になっている．

2つの性質をみたす微分方程式を 線形微分方程式 と呼ぶ．

そうでないと「非線形微分方程式」… たいてい手で解けない．

①と②の性質を1つにまとめると．

「ある微分方程式の独立な2つの解 x_1, x_2 が見つかったとき．
それらを重ね合わせたもの「$c_1x_1 + c_2x_2$」が解になっていれば
ある微分方程式は 線形微分方程式 である．」

今解きたい微分方程式は 線形~~の~~微分方程式か？

$$(7.5) \cdots \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.$$

(7.5)の独立な2つの解を x_1, x_2 とする. x_1 と x_2 は

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega^2 x_1$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega^2 x_2.$$

をみたす.

x_1 と x_2 を重ね合わせたもの $c_1x_1 + c_2x_2$ を 2階微分してみる

$$\frac{d^2}{dt^2}(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + c_2\frac{d^2x_2}{dt^2}$$

$$= c_1(-\omega^2 x_1) + c_2(-\omega^2 x_2)$$

$$= -\omega^2(c_1x_1 + c_2x_2)$$

$$\boxed{\frac{d^2(c_1x_1 + c_2x_2)}{dt^2} = -\omega^2(c_1x_1 + c_2x_2)}$$

重ね合わせたものが(7.5)の解になっている

→ (7.5)は~~微分~~線形微分方程式である.

$x_1, x_2 \longrightarrow c_1 x_1 + c_2 x_2$

解の 重ね合わせ

重ね合わ~~せ~~された解.

演習問題 1 のみ : (7.21) が 線形微分方程式であることを確かめなさい.

宿題.