今日の予定

前回宿題についての注意

第4章　数学の話題　ベクトルの微分

4.1 （スカラーの）微分の復習.

4.2 ベクトルの微分

$\left.\right\}$ 数学

・・・・・・・・・・・・・・・休憩

4.3 位置ベクトル, 速度, 加速度. … 上記の数学を物理学に適用する.

4.1 微分の復習.

t：実数の変数（物理学では時間を想定）

tの関数 $f(t)$ … スカラー量.

$f(t)$をtに関して微分する.

記号　$f'(t)$ × 高校生.

$\dfrac{df(t)}{dt}$ 又は $\dfrac{df}{dt}$

具体的にどのように計算するか？

定義

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

定義を表わす記号

例： $f(t) = t^n \rightarrow \frac{df(t)}{dt} = n t^{n-1}$

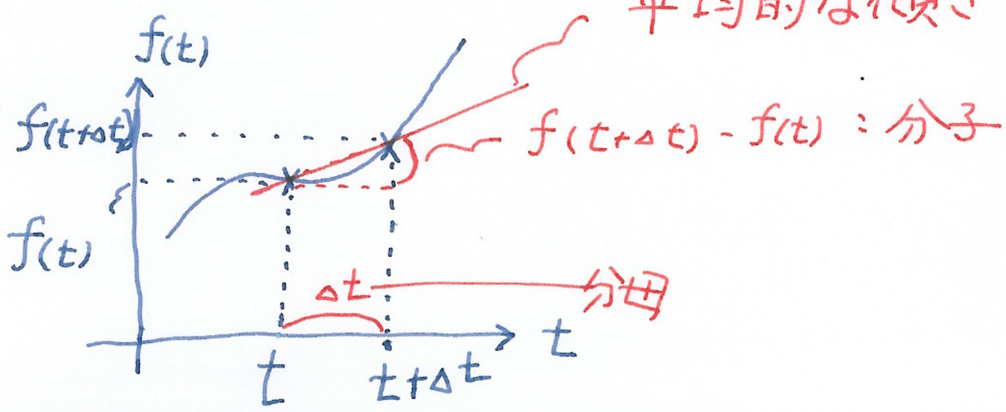
$f(t) = e^t \rightarrow \frac{df(t)}{dt} = e^t.$

…覚えているが，全て定義から計算された結果を公式として覚えている．

定義が重要！

微分の意味

図で表わすと



$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

記号についての注意

$f_{(t)}$ を t に関して微分する

$\frac{df}{dt}$ 又は $\frac{d}{dt}f$

これで ひとまとまり

分数のような形に書いているが、分数でない。

呼び方

ディーエフ ディーティー

一階微分した量が t の関数になっていれば もう~~一個~~一階微分できる

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{d^2 f}{dt^2}$$
$$= \frac{d^2 f}{dt^2}$$

: f の t に関する2階微分

f'' ✕ この書き方は卒業しよう！

4.2 ベクトルの微分

どうやって定義するか？

t：実数変数（時間を想定）

t の関数のあるベクトル $\mathbb{A}(t)$

補足　$\mathbb{A}$ が t の関数であるということは

$\mathbb{A}$ の向きが t と共にかわる

$\mathbb{A}$ の大きさも t と共にかわる.

$\mathbb{A}(t)$ を t に関して微分

$$\boxed{\frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{A}(t+\Delta t) - \mathbb{A}(t)}{\Delta t}}$$

スカラーの微分の自然な拡張.

ベクトルの微分は　ベクトル　？

× スカラー　？

× 上記のいずれでもない？

デカルト座標系で $\mathbf{A}$ を分解

$$\mathbf{A} = \underline{A_x}\,\mathbf{i} + \underline{A_y}\,\mathbf{j} + \underline{A_z}\,\mathbf{k}$$ と書くとすると.

成分（スカラー）

単位ベクトル（ベクトル）.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}\right)$$

$$= \frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + A_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j} + A_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k} + A_z\frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

連鎖律

$$\boxed{\frac{d}{dt}(fg) = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt}}$$

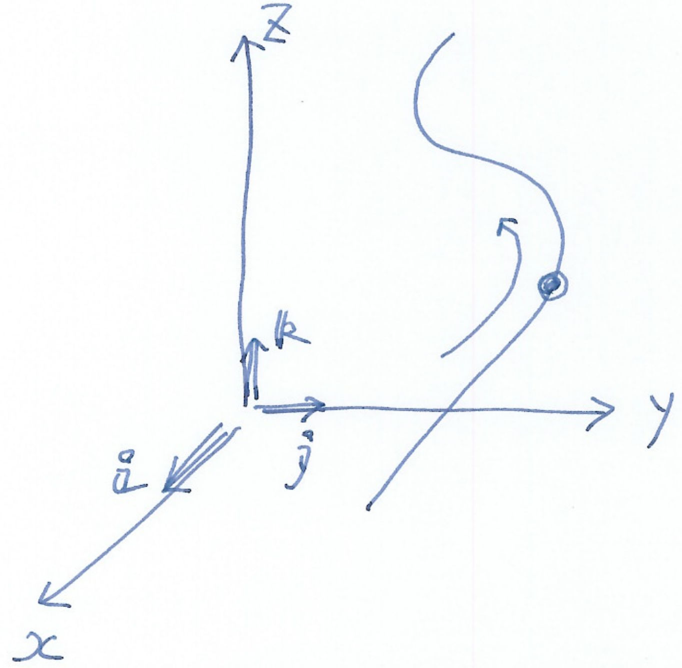
一般的にはこう書ける ⟶

$$= \left(\frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k}\right) + \left(A_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right).$$

デカルト座標の特殊事情 $\left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0\right)$

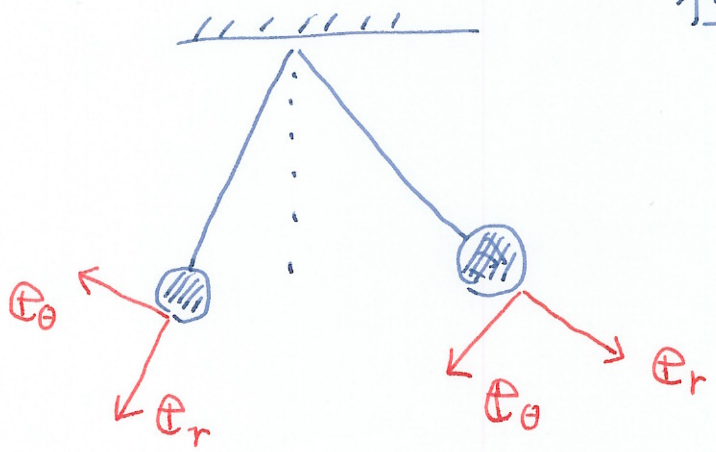
$$= \frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k}.$$

… デカルト座標系ではベクトルの微分は、その成分だけ微分すればよい.



$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = 0$$

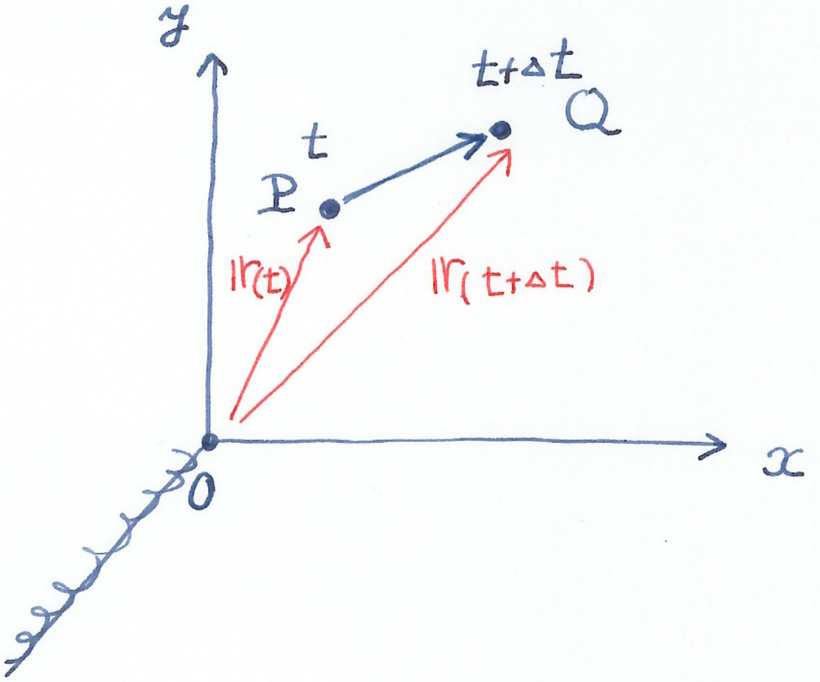
極座標系



$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{e}_r(t)}{dt} &\neq 0. \\ \frac{d\boldsymbol{e}_\theta(t)}{dt} &\neq 0 \end{aligned}\right\} \text{6又は7章.}$$

4.3. 変位，速度，加速度.

ベクトル微分の物理学への適用.



ある時刻 t … 点P　　$t+\Delta t$ 点Q

この質点のΔtという間隔での平均的な速度は？
（速度：ベクトル）

平均速度.
- 向き. P→Qに向かう向き
- 大きさ(速さ) PQ間のキョリをΔtで割る.

} PからQに向かうベクトルをΔtで割ったモノ.

数学的に表現.

→ PからQに向かうベクトル … $\mathbb{r}(t+\Delta t)-\mathbb{r}(t)$: 変位

$\mathbb{r}$: 位置ベクトル

平均の速度. $\dfrac{\mathbb{r}(t+\Delta t)-\mathbb{r}(t)}{\Delta t}$

$$\left(\begin{array}{l}\text{tにおける}\\ \text{瞬間的な}\\ \text{速度}\end{array}\right) = \mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

↓ ベクトルの微分を思い出すと.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

: tにおける瞬間的な速度は位置ベクトルの時間微分で与えられる.

同様に 加速度 … 速度の変化率（ベクトル）

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

… 加速度は速度の時間微分で与えられる

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

… 加速度は位置ベクトルの時間に関する2階微分で与えられる.

デカルト座標系の成分で表わすと.

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$ ：位置ベクトルの分解

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$$ ：速度の分解.

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$$ ：加速度の分解.

各成分間の関係.

$$\mathbf{v} = \underline{v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \underline{\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}}.$$

等しい

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}.$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

が導ける.

まとめ

位置ベクトル

↓ t で微分

速度（ベクトル）

↓ t で微分

加速度（ベクトル）

演習問題　講義ノート p.36 ＊ ‥‥ 宿題.

目的　上記のまとめを確かめる.

高校で習った公式が上記のまとめと一致していることを確かめる. ── 主目的

この授業では（物理学では）覚えなくてよい.

ベクトルの表記に注意しましょう.

1 のモハン解答を先ずよく見て、解答の仕方を理解した後に

2, 3 を自力で解いてみましょう.