8.5 Taylor展開.

テイラー展開 ，マクローリン展開.

より一般的

2つの違いは後で解説.

関数を多項式で近似する方法.

実数 x を独立変数とする

1次式 : $ax+b$　　a, b : 定数

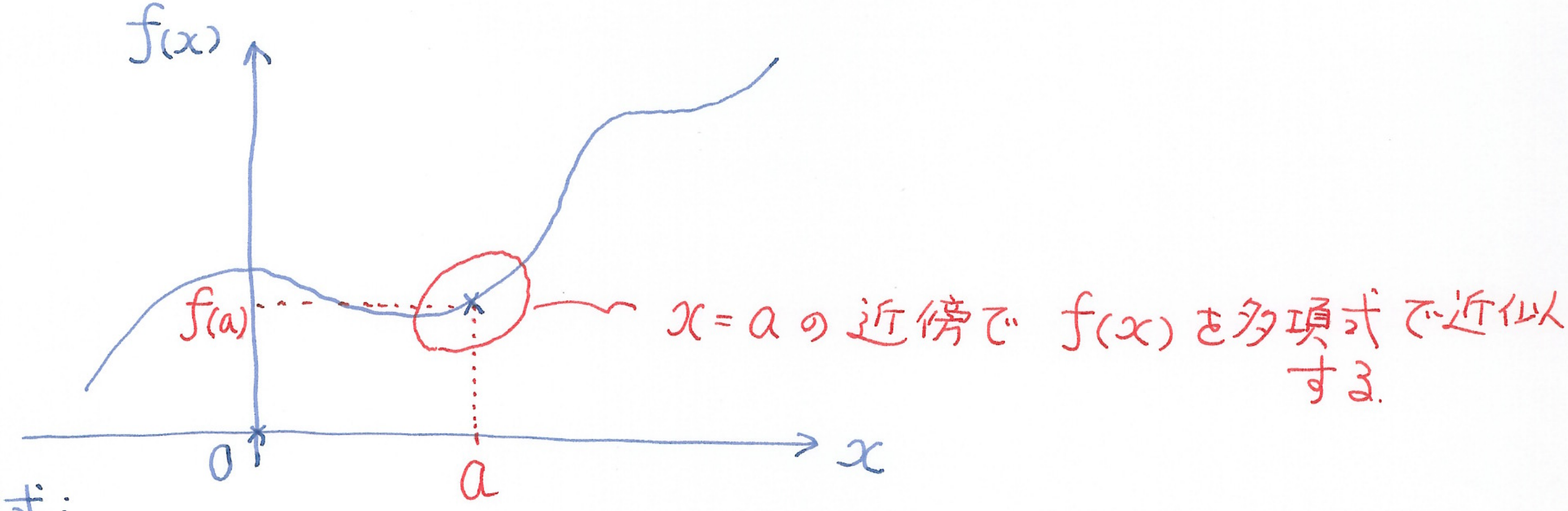
2次式 : ax^2+bx+c　　a, b, c : 定数

⋮

n次式 : $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$

$c_i \ (i=0,1,\cdots n)$: 定数

$f(x)$



2次式:

$$f(x) = C_2(x-a)^2 + C_1(x-a) + C_0\cancel{(x-a)^0} \quad \text{と近似.}$$

このとき. C_2, C_1, C_0 をどうやって選ぶか?

C_0 は $x=a$ を代入する

$$f(a) = C_2 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_0 \rightarrow C_0 = f(a)$$

C_1 は $f(x)$ を x で微分する.

$$\frac{df(x)}{dx} = 2C_2(x-a) + C_1$$

上式に $x=a$ を代入する.

$$\frac{df(a)}{dx} = 2\cdot C_2\cdot 0 + C_1 \longrightarrow C_1 = \frac{df(a)}{dx}.$$

$\frac{df}{dx}$ の結果に $x=a$ を代入する

C_2 は $\frac{df}{dx}$ を x で微分する.

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 2C_2$$

上式に $x=a$ を代入する

$$\frac{d^2f(a)}{dx^2} = 2C_2 \longrightarrow C_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2f(a)}{dx^2}$$

以上まとめると. $f(x)$ を $x=a$ のまわりで2次式で近似したとき.

$$f(x) = f(a) + \frac{df(a)}{dx}(x-a) + \frac{1}{2}\frac{d^2f(a)}{dx^2}(x-a)^2$$

$f(x)$ を $x=a$ のまわりで n 次多項式で近似する.

導出の方法は上の2次式による近似で説明したものと同じ

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{df(a)}{dx}(x-a) + \frac{1}{2}\frac{d^2f(a)}{dx^2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^nf(a)}{dx^n}(x-a)^n}$$

$f(x)$ の $x=a$ のまわりでのテイラー展開 という.

$x=0$ (つまり $a=0$ のとき) のまわりでの $f(x)$ のテイラー展開を

マクローリン展開という.

例: $f(x) = \sin x$ を $x=0$ のまわりで Taylor 展開してみる.

$$f(0) = \sin 0 = 0$$

$$\frac{df}{dx} = \cos x \qquad \frac{df(0)}{dx} = 1$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -\sin x \qquad \frac{d^2f(0)}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^3 f}{dx^2} = -\cos x \qquad \frac{d^3 f(0)}{dx^3} = -1.$$

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = \sin x \qquad \frac{d^4 f(0)}{dx} = 0$$

以上から.

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

展開をここまで切ることがよくある.

$$x = 10^{-2} \quad (0.01)$$

$$x^3 = 10^{-6} \quad (0.000001)$$

↓ 比 10^{-4} 1万分の1

しばしば $\sin x \simeq x$ という近似を使う

振り子の運動方程式の近似によく使われる.