力学 I / 力学 A
2020 年度講義ノート

岩山 隆寛[*1]

福岡大学 理学部地球圏科学科

[*1] e-mail: iwayama@fukuoka-u.ac.jp

目次

第 1 章

序論

この講義ノートは, 福岡大学理学部地球圏科学科の「力学 I」, および工学部機械工学科の「力学 A」の講義ノートである. 両方の授業は名称は異なるが共に 1 年次前期に開講されていて, 同じ目的・目標の授業である. 授業はこの講義ノートに従って板書をしながら進めていく. これまでにこの授業を受けてきた学生からは, 板書のスピードが速いので, 板書をノートに書き写す作業に集中してしまい, 講義内容を理解することに集中できない, といった意見を聞く. この講義ノートをうまく活用して, 板書を写す作業を軽減し, 授業の内容を理解して欲しい. もちろん, 授業中に理解できるように丁寧に授業を進めていくが, 真の理解には復習が重要である. この講義ノートを復習に役立てて欲しい.

1.1 力学を学ぶ意義

自然科学には大きく分けて四つの分野, 物理学, 化学, 生物学, 地学 (最近は地球惑星科学とも呼ばれる) がある. この中で物理学は, 最も早く体系化[*1]され, その体系は他の自然科学分野の発展に大きく影響を及ぼした. さらに, 物理学は他の自然科学分野や工学の基礎にもなっている. これらの点から物理学は自然科学の中で最も基礎的かつ包括的で, 重要な学問分野である, と言えるだろう.

物理学は, 考察する対象によっていくつかの分野に分かれている. 物体の運動を扱う「力学」, 熱現象を扱う「熱力学」, 電気・磁気現象を扱う「電磁気学」, 原子などの微視的な世界の現象を扱う「量子力学」, 原子や分子などが非常に多数存在して集団を構成しているとき, その集団の性質を扱う「統計力学」, は物理学の基礎的な分野である. 力学は物理学の分野の中で最も早く体系化された. さらにその体系は, 力学の後に発展した物理学の諸分野の体系化に大きな影響を及ぼした. そこで力学は物理学の骨格であるともいえ

[*1] 知識や方法, 法則などを系統立てて整えること, また, まとめあげること.

る．このような理由から大学の理系学部初年次には, ほとんど必ず力学の授業が開講されている．そして, 力学をしっかり修めておくことが大学後年時の勉強や卒業研究にとって重要である．

1.2　物理学や力学の論理体系

一般に論理的に結論を導く方法には 2 つの方法, 帰納と演繹, がある.[*2]

1.2.1　帰納とは

帰納とは, 具体的な事例を観察したり集めたりし, そこにある共通点を探したり法則性を見出すことを通じてより一般的な結論を導く方法である．

物理学においては, 実験や観測によって一般的に成り立つ法則を見つけることが帰納的方法である．一般的に成り立つ法則の中で最も基本的な法則（基本法則と呼ばれる）を数式で表現したものは基礎方程式と呼ばれる．基本法則が発見されれば, その分野は完成された, といっても過言ではない．力学, 熱力学, 電磁気学, 量子力学では基本法則と基礎方程式が既に知られている.[*3]

1.2.2　演繹とは

演繹とは, 出発点としてある前提を認めたら, そこから必然の展開として結論を導く方法である．

物理学における議論の出発点としての前提は, 基礎方程式である．考察する状況に応じて基礎方程式を立て, それを数学的に解くことにより, 考察したい現象の性質や未来が予測できる．このことから数学は物理学にとっては「ことば」であり[*4], 物理学と数学とは密接なつながりがある．

1.2.3　本講義の進め方

本講義は演繹的に議論を進めていくことにする．力学では基本法則や基礎方程式は既に知られている．基本法則は ニュートンの運動の法則, であり, 基礎方程式は ニュートンの運動方程式である．本講義ではまず先に基礎方程式を提示し, それを理解するための概念

[*2] 帰納と演繹の説明には, 滝浦真人著『日本語リテラシー』（2016 年, 放送大学教育振興会）の記述を採用した．

[*3] なお, 電磁気学は既に体系化された学問であるが, 後年次に開講される電磁気学の講義ではしばしば帰納的に議論が展開される．

[*4] 「物理学は数学で語られる.」という名言がある．

を説明する．次に基礎方程式の応用として, いくつかの具体的な問題を扱う．さらに基礎方程式から導かれる法則も解説する．

本講義では次の話題を扱う予定である.*5

1. 質点, 座標系
2. ベクトル
3. ベクトルの微分 (変位, 速度, 加速度)
4. ニュートンの運動の法則
5. 一様な重力場中の質点の運動
   (a) 放物運動
   (b) 自由落下
6. 調和振動子
   (a) ばねにつながれた物体の運動
   (b) 振り子の運動
7. ベクトルの掛け算, 積分と偏微分
8. 仕事とエネルギー

1–3, 7 は基礎方程式を理解するために必要な概念や数学的手法の説明である．4 で力学の基本法則, 基礎方程式が語られる．5, 6 は運動方程式の応用で, 具体的な問題を解いてみる．これらの問題は高等学校の「物理基礎」で扱われた問題である．高等学校のときと議論の仕方, 問題の解き方が全く異なることを実感して欲しい. 8 は運動方程式から導かれる性質や概念の解説である．講義全体を通じて, 高校の「物理基礎」や「物理」では天下り的に提示され, 覚えた公式が, 基礎方程式から数学的に導かれることを理解して欲しい.

1.3　ニュートンの運動の法則

Sir Isaac Newton は三つの法則を力学の公理*6と考えた．その中でも具体的な問題を解く際に中心的役割を果たすものがニュートンの第 2 法則で, それを数学的に書き下したものが力学における基礎方程式, 運動方程式, である:

*5 授業回数や 1 回の授業時間の制約から, 話題を整理・統合する場合がある.

*6 証明不可能であるが実験や観測から正しいことが示されている根本命題のことを指す.

ニュートンの運動の第 2 法則（運動方程式）

物体に力 $\boldsymbol{F}$ が働くと速度が変化し（このことは加速度が生じることと等価である），物体の加速度は力に比例する:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}. \tag{1.1}$$

ここで, m は物体の質量, $\boldsymbol{a}$ は加速度である.

なお, 物体の加速度 $\boldsymbol{a}$ は速度 $\boldsymbol{v}$ の変化率, $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$, なので, (1.1) は

微分方程式の形に書かれた運動方程式 (その１)

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{1.2}$$

とも書かれる．ここで, t は時間である．$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ は速度 $\boldsymbol{v}$ を時間に関して微分する, ことを表す記号である．(1.2) は微分を含んだ方程式なので, 数学的には微分方程式と呼ばれる.

さらに, 速度 $\boldsymbol{v}$ は位置 $\boldsymbol{r}$ の変化率, $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, なので (1.2) は

微分方程式の形に書かれた運動方程式（その２）

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \tag{1.3}$$

とも書かれる．$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を時間に関して 2 階微分する, ことを表す記号である．(1.3) も微分方程式である．(1.1)–(1.3) はニュートンの運動の第 2 法則を具体的に数式で書き表した式なので, 全て運動方程式である.

1.4　表記法

物理学では主に数式を用いて議論を展開する．数式は数字, 記号で構成されるので, 数式を構成する文字の書き方はとても重要である． (1.2), (1.3) において, 例えば力を表す記号 $\boldsymbol{F}$ には F とは異なる文字種, 太文字, を使用していることに注意しよう．太文字で表された記号はベクトル量を表す．$\boldsymbol{r}$ と r の違い, $\boldsymbol{v}$ と v, $\boldsymbol{a}$ と a を区別して欲しい．アルファベッドの他に, ギリシャ文字も物理学ではよく用いられるのでそのような文字の使用に慣れてほしい．よく使用されるギリシャ文字は α (アルファ), β (ベータ), γ (ガンマ), δ(デルタ), Δ(デルタ), ϵ(イプシロン), π(パイ), θ(シータ), λ(ラムダ) などである.

1.5　数学との関係

力学の問題は, 力 $\boldsymbol{F}$ が与えられたときに, 物体が任意の時刻 t においてどのような速度 $\boldsymbol{v}$ で運動するか, さらには任意の時刻にどこの場所 $\boldsymbol{r}$ に存在するか, を求めることである．つまり力学の問題を解く, ということは $\boldsymbol{F}$ が既知の量であり, (1.2), (1.3) の微分方程式[*7]を解いて, 物体の速度 $\boldsymbol{v}$ を t の関数で表現したり, 物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を時間 t の関数として求めたりすることである．このことから, ベクトル, および微分積分の数学的知識を必要とする．講義では数学的知識については必要になったときにその都度概念の解説や便利な計算法の紹介をしたり, 演習問題を解いて計算力を鍛えていくことにする.

1.6　数学の話題：高校までに習った数学の復習

高校までに習った数学の中で, 本講義で特に必要な事項をあらかじめ復習しておく．以下に述べたもの以外の必要な数学的な事項は, その都度解説する.

- ピタゴラスの定理: 図 1.1 で示されているように, 底辺 (AB 間) の長さが a, 高さ (BC 間) が b の直角三角形の斜辺 (AC 間) の長さ c は

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1.4}$$

　である.

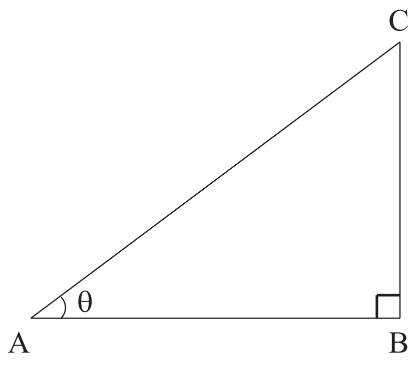

図 1.1　直角三角形 ABC.

- 三角関数: 図 1.1 で示されている三角形 ABC において, 辺 AC と辺 AB の間の角

*7 微分を含んだ方程式のこと.

度を θ とする．このとき,

$$\sin\theta = \frac{b}{c}, \tag{1.5}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{c}, \tag{1.6}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}, \tag{1.7}$$

である．

- 三角関数の公式:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{1.8}$$

この公式は有名な公式なので覚えている人も多いと思う．覚えておくと計算が早まるので便利であるが, 上のピタゴラスの定理と三角関数の定義から導ける．

- 冪関数の微分: n をある定数, x を実数の変数として, 冪関数 $f(x) = x^n$ を x に関して微分すると,

冪関数の微分

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1} \tag{1.9}$$

である．ここで, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ は一つの記号を表し, この記号の左側に来る関数を x に関して微分する, という記号である．高校の数学では $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ は $f(x)'$ と書いていたものである．$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ も $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ も共に同じ意味で,「$f(x)$ を x に関して微分する」, という意味である．どの変数で微分するか, ということを明示的に表すために, このような表記になっている．ベクトルを太文字で書いたり, ギリシャ文字を使用することの他に, 微分のこのような表記にも慣れていってほしい．$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ はしばしば, x の依存性を省略して, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ とも書く．

- 指数関数の微分: x を実数の変数として, 指数関数 $f(x) = e^x$ を x に関して微分すると,

指数関数の微分

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x \tag{1.10}$$

である．

- 三角関数の微分: x を実数の変数として, 正弦関数 $f(x) = \sin x$ と余弦関数

$g(x) = \cos x$ を x に関して微分すると, それぞれ

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x, \tag{1.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x \tag{1.12}$$

である.

- 合成関数の微分: x, y を実数とし, f は y の関数 $f(y)$ であり, さらに y は x の関数 $y(x)$ であるとする．このような関数を合成関数という．このとき, f を x に関して微分すると

  合成関数の微分

  $$\frac{\mathrm{d}f(y(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.13}$$

  である．$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ とも書く.

- 積関数の微分: x を実数とし, x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ との積 fg を微分すると

  積関数の微分 (微分の連鎖律)

  $$\frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \tag{1.14}$$

  である．これは微分の連鎖律 (chain rule) とも呼ばれる.

演習問題

レポートの提出の仕方

- レポートは, A4のレポート用紙に作成し, それをスマホなどを用いて撮影した画像をPDFに変換してひとまとめにし, 所定の場所にアップロードしてください. さらに以下の注意をよく守ってください.
  1. レポート用紙本体に, 学籍番号と氏名を必ず書いてください.
  2. スマホなどで撮影した画像は JPEG と呼ばれる形式のファイルになっています. これを PDF 形式に変換するには, ウェブ・ブラウザで `https://www.ilovepdf.com/ja/jpg_to_pdf` にアクセスし, そこに変換したい画像をまとめてドラッグ・アンド・ドロップすると, PDF が生成されます.
  3. 提出するレポートのファイル名を半角文字で, 学籍番号, にしてください. 例えば, 学籍番号 ab123456 の学生さんの場合, ファイル名は ab123456.pdf としてください. 1 回の授業で約 70 通のファイルが届きます. 整理の都合でファイル名を必ず指定の通りにしてください. 指定に従っていないと, レポートが迷子になって未提出になる場合があります.

レポートを作成する際の注意

学ぶことは, 真似ることから始まります. 演習問題がよくわからない場合には, 模範解答をよく検討しながら写してみましょう, 真似してみましょう. そのことにより, 論理の展開の仕方や解答の仕方を学びましょう. ただし, ただ写すだけの作業にならないように注意してください.

1. 三角関数の公式:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

   をピタゴラスの定理と三角関数の定義から導きなさい.

2. t に関する 2 次関数 $f(t) = at^2 + bt + c$ の微分に関して以下の問いに答えなさい. ここで, a, b, c はある定数とする.

   (a) f を t に関して微分しなさい. つまり, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ を求めなさい. 解答の際には表記法に注意しましょう. 高校までの表記法ではなく, 講義や講義ノートで使用した

表記法を使いましょう．[*8]

(b) 上で得られた答えをさらに t に関して微分しなさい．つまり，$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ を求めなさい．[*9]

3. 合成関数の微分を用いて，次の問いに答えなさい．
   (a) α を定数，x を実数の変数として，指数関数 $f(x) = e^{\alpha x}$ を x に関して微分しなさい．[ヒント：$y = \alpha x$ と考える.]
   (b) α を定数，x を実数の変数として，指数関数 $f(x) = e^{\alpha x^2}$ を x に関して微分しなさい．[ヒント：$y = \alpha x^2$ と考える.]
   (c) α を定数，x を実数の変数として，正弦関数 $f(x) = \sin(\alpha x)$ と余弦関数 $g(x) = \cos(\alpha x)$ を x に関して微分しなさい．[ヒント：$y = \alpha x$ と考える.]
4. 積関数と冪関数の微分の公式を使用して，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}f - g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}{f^2}$$

となることを示しなさい．[ヒント：$\frac{g}{f} = gf^{-1}$ と考える.]

---

*8 f' と書かないように！

*9 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ を t に関して微分するとき，表記法としては，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$$

や

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$$

と書く．これらは，f の t による 2 階微分，という．

第 2 章

準備: 質点, 座標系, 軌道

運動方程式を提示する前に, 本章と引き続くいくつかの章において, 運動方程式を理解するために必要な概念の解説を行う.

2.1 質点

物理学では, 考察の対象とする現象を理想化して取り扱う, もしくは現象の本質を取り出して, それを研究の対象とすることが常套手段である.

本講義では質点の力学を扱う. 質点とは仮想的な物体で, 有限の質量を持つが大きさを持たない点のことである. 実在の物体は有限の質量と大きさを持つが, そのような物体を質点と理想化し, その運動を扱うのが質点の力学である. 実在の物体の運動を考察する際に, 物体の回転や変形を考慮しなくていい場合には, その物体の重心の運動は質点の力学でよく記述される. 例えば, 太陽の周りをまわる地球の公転運動を扱う場合には, 地球を質点として扱う.[*1]

2.2 座標系

質点の運動を扱うには, 質点の位置の表し方を定めておかなければならない. 質点の位置を表すには, 座標系を適当に定め[*2], それによって質点の位置を表す. 「適当に定める」, とは, 考察する問題に適した座標系を用いる, もしくは, 問題が簡単になる座標系を用いることである.

[*1] 有限の大きさと質量を持つが, 変形しない仮想的な物体も物理学の考察の対象である. そのような物体は剛体と呼ばれる. 物体の重心の運動だけでなく, 物体の回転も考慮に入れるときには物体を剛体と理想化して扱う. 剛体の力学は, 質点の力学の後に学ぶのが順序である.

[*2] 座標系を張る, という言い方もする.

代表的な座標系としては, デカルト座標系[*3], 円筒座標系（もしくは円柱座標系）, 極座標系がある.

デカルト座標系は, 図 2.1 に示される座標系で, 互いに直交した座標軸, x 軸, y 軸, z 軸が直線であり[*4], 点 P に質点が存在したとき, 質点の位置を次のように表す：点 P から xy 平面に下した垂線と xy 平面との交点を Q, Q から x 軸に下した垂線と x 軸との交点を R, Q から y 軸に下した垂線と y 軸との交点を S, P から z 軸に下した垂線と z 軸との交点を T, とする. R, S, T はそれぞれ原点 O から, x, y, z の距離にあるとき, 点 P の位置を (x, y, z) と表す.

本講義では特に断りがないときにはデカルト座標系を用いる. デカルト座標系は直感的に一番理解しやすい座標系であり, これまでもこの座標系は数学でも習ってきている. しかしながら, 解く問題によっては, デカルト座標系よりも円筒座標系 (図 2.2 参照) や極座標系 (図 2.3 参照) を用いたほうが便利な場合がある. これらの座標系は必要になったときに解説する. 本講義では, 2 次元の極座標系と呼ばれる座標系を, 振り子の運動を考察するときに使用する. 2 次元極座標系は, 円筒座標系 (図 2.2) で $z = 0$, もしくは, 極座標系 (図 2.3) で $\theta = \pi/2$ とした場合である.

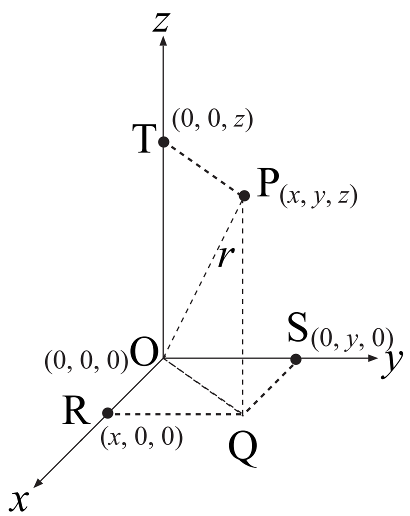

図 2.1　デカルト座標系.

[*3] Cartesian corrdinate system という

[*4] そのため, 直交直線座標系とも呼ばれる.

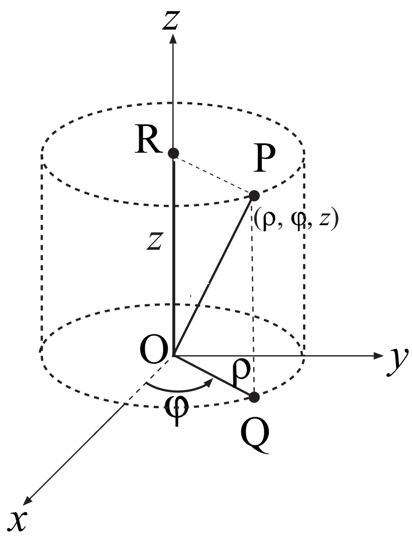

図 2.2　円柱座標系, もしくは円筒座標系. 点 P を OQ 間の長さ ρ と, 或る適当な座標軸からの角度 φ, OR 間の距離 z を使って, 点 P の位置を (ρ, φ, z) と表現する座標系である.

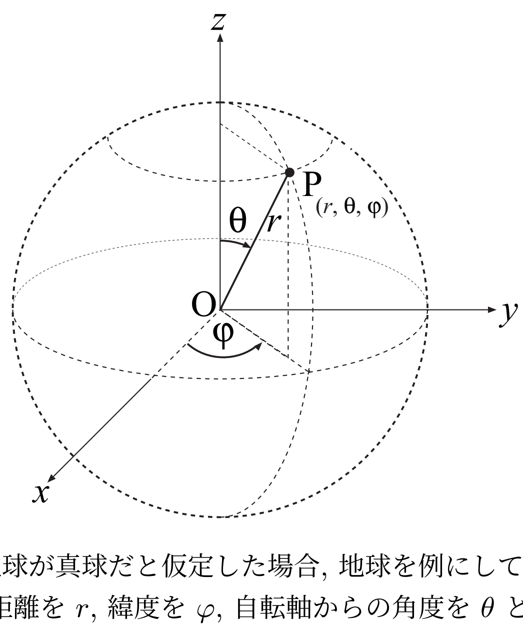

図 2.3　極座標系. 地球が真球だと仮定した場合, 地球を例にして説明すると, 地球中心 O から 点 P までの距離を r, 緯度を φ, 自転軸からの角度を θ として, 点 P の位置を, (r, θ, φ) と表現する座標系である.

2.3　軌道

質点が運動すると, その位置 $(x,\, y,\, z)$ は時間と共に変化する．つまり, $(x(t),\, y(t),\, z(t))$ と質点の位置座標は時間の関数となる．しばしば時間の依存性を表す (t) という記号は省略して書く．時々刻々の質点の位置を点でつなぐと, それは一本の曲線になる．そのような曲線を質点の軌道と呼ぶ．微分方程式で書かれた運動方程式 (1.3) を解くと, 質点の位置座標は時間の関数として求められる．つまり, x, y, z は t の関数と書ける．運動方程式を解いて得られた x, y, z から t を消去することで, 質点の軌道の式が得られる．以下では, 2 次元デカルト座標系で質点の位置 (x, y) が時間の関数として与えられたときに, 軌道を求める例を示す.

例 1： xy 平面内を時刻 $t = 0$ において $(x_0,\, y_0)$ を出発点として x, y 方向にそれぞれ一定の速度 v_x, v_y で運動を始めた質点の任意の時刻 t における位置は,

$$x = x_0 + v_x t, \tag{2.1}$$
$$y = y_0 + v_y t, \tag{2.2}$$

で与えられる．このとき, 質点の軌道は (2.1) と (2.2) から t を消去して,

$$y = \frac{v_y}{v_x} x + \left(y_0 - \frac{v_y}{v_x} x_0 \right) \tag{2.3}$$

となる．これは $y = ax + b$ の形をしているので, 質点の軌道は直線である.

例 2： 鉛直平面内（水平方向を x, 鉛直上向きを y とする）を時刻 $t = 0$ において原点 (0, 0) を出発点として x, y 方向にそれぞれ v_x, v_y の速度で運動を始めた質点が, 重力の作用を受けながら運動しているとする．このとき, 質点の任意の時刻 t における位置は,

$$x = v_x t, \tag{2.4}$$
$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_y t, \tag{2.5}$$

で与えられる．質点の軌道は (2.4) と (2.5) から t を消去して,

$$y = -\frac{g}{2 v_x^2} x^2 + \frac{v_y}{v_x} x \tag{2.6}$$

となる．これは $y = ax^2 + bx + c$ の形をしているので, 質点の軌道は放物線である.

例 3：　xy 平面内で, ω を定数として質点の位置座標が

$$x = a \sin \omega t, \tag{2.7}$$
$$y = b \cos \omega t, \tag{2.8}$$

で与えられるとする．このとき, 質点の軌道は

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \tag{2.9}$$

つまり, 楕円軌道である.[*5]

2.4　数学の話題：オイラー（Euler）の公式

物理学の問題を扱っているときに様々な関数が現れるが, 三角関数（特に sin, cos）は頻繁に登場する．三角関数では様々な公式が知られている．例えば, 加法定理, 和積の公式, 積和の公式, ド・モアブル（de Moivre）の公式などがある．これらの公式は以下のオイラーの公式を知っていれば, それから簡単に導くことができる．

オイラーの公式とは

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \tag{2.10}$$

である．ここで, i は純虚数 $i = \sqrt{-1}$, e はネイピア数（Napier 数）$e = 2.71828\cdots$, θ は実数である．

例えば (2.10) を使うと,

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha. \quad \text{(加法定理 (1))} \tag{2.11}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \quad \text{(加法定理 (2))} \tag{2.12}$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1. \tag{2.13}$$
$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n. \quad \text{(ド・モアブルの公式)} \tag{2.14}$$

が簡単に示せる．(2.14) は $n = 2$ とおくと 2 倍角の公式になる．さらに, $n = 3$, 4 などと置くことで 3, 4 倍角公式も求めることができる．

[*5] 運動方程式を解くと, 質点の位置は時間 t の関数として与えられる．ここまではいわば算術である．単に計算して答えが出ました, で終わりにせず, 得られた結果を吟味することが物理学には必要である．得られた質点の位置から軌道を求め, それが現実や直感と整合的かということを議論する，ということはその一つの例である．

加法定理から, 積和の公式

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\},\\
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\},\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\},
\end{aligned}
$$

を導くことができるので, 加法定理は覚えましょう, と高校では習ったかもしれない. しかし, オイラーの関係式を知っていれば, 加法定理さえも覚えなくてよいのである.

指数関数 e^x は微分しても積分しても形が変わらないのでとても扱いやすい関数であることはよく知られている. $e^{i\theta}$ を θ で微分してオイラーの公式を使うと,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}e^{i\theta}}{\mathrm{d}\theta} &= ie^{i\theta} \quad (\text{純虚数 } i \text{ は定数と見做して指数関数の微分より})\\
&= i\left(\cos\theta+i\sin\theta\right) \quad (\text{オイラーの公式より})\\
&= -\sin\theta+i\cos\theta
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

となる. 一方, オイラーの公式の両辺を θ で微分すると

$$
\frac{\mathrm{d}e^{i\theta}}{\mathrm{d}\theta} = \left(\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}+i\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta}\right) \tag{2.16}
$$

となる. (2.15) と (2.16) を等号で結び, 実部と虚部を比べると, 三角関数の微分の式

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta} &= -\sin\theta\\
\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta} &= \cos\theta
\end{aligned}
$$

が得られる. (もしくは三角関数の微分や指数関数の微分とオイラーの公式は矛盾していない, とも解釈できる.)

この指数関数の微分, 積分の性質とオイラーの公式は物理学ではとてもよく使うので, 是非とも覚えおいて欲しい.

演習問題

オイラーの公式を用いて, (2.11)–(2.14) を証明しなさい.

(2.11),(2.12) **の証明について**:　オイラーの公式の便利さを体験するために, 一度自分で手を動かして加法定理を証明しましょう.

(2.13) **の証明のヒント：**　$e^{i\theta}$ の複素共役は $\left(e^{i\theta}\right)^* = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ である. さらに, $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$ である.

(2.14) **の証明のヒント**:　$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ である.

第 3 章

数学の話題：ベクトル

物理学の法則は, しばしはベクトルを用いて表現される．ベクトルを用いた表現はベクトル形式とも呼ばれる．ベクトルは採用する座標系に依存しない量なので, ベクトル形式で書かれた物理法則も座標系に依存しない, という利点がある．

ここではベクトルの表記法（書き方）と計算法（特に足し算と引き算）について述べる．

3.1　スカラーとベクトル

長さ, 時間, 質量のような物理学における様々な量を特徴づけるには, 単位[*1]は別にして単一の実数が必要である．そのような量はスカラー（もしくはスカラー量）と呼ばれ, その実数の絶対値はその量の大きさと呼ばれる．スカラーは記号で A, B, C, a, b, c などと書く．

いっぽう, 速度のような量を特徴づけるには, 大きさの他に方向も必要である．そのような量はベクトル（もしくはベクトル量）と呼ばれる．ベクトルは幾何学的には点 P と点 Q とを結ぶ矢印 PQ で表され (図 3.1 参照), このとき P はベクトルの始点, Q はベクトルの終点と呼ばれる．ベクトルを記号で表す際には太文字を使用して $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ などと書く．ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさ $|\boldsymbol{A}|$ は A と書かれる．即ち, $|\boldsymbol{A}| = A$ である．

[*1] 長さ, 時間, 質量の単位としてはメートル [m], 秒 [s], キログラム [kg] を用いる．このような単位系は SI 単位系と呼ばれる．

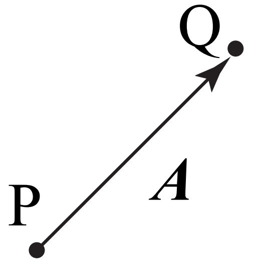

図 3.1　始点 P と終点 Q とを結ぶベクトル $\boldsymbol{A}$.

ベクトルの表記法についての注意 (その１)

ベクトルを表すときには, 高校では例えば $\vec{A}$ や $\vec{a}$ のように記号の上に矢印を付けて表した. 本講義や大学で使用する多くの教科書, 研究論文では上付きの矢印ではなく, $\boldsymbol{A}$ や $\boldsymbol{a}$ のように太文字を使ってベクトルを表す. 大文字ではないから注意して欲しい. 太文字 もしくは 太字である. この太文字を使うベクトルの表記法に早く慣れてほしい.

3.2　ベクトルの代数

スカラー（もしくは実数）の足し算, 引き算, 掛け算はベクトルにも拡張することができる. ここでは足し算と引き算のみを解説しておく. ベクトルどうしの掛け算はあとの章で解説する.

1. 始点に関係なく, 互いに平行で大きさの等しい二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は等しい : $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ (図 3.2 参照).

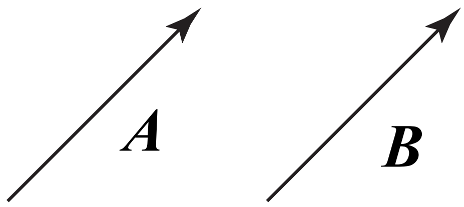

図 3.2　互いに平行で大きさの等しい二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$.

2. ベクトル $\boldsymbol{A}$ と同じ大きさを持ち, 逆方向を向くベクトルは $-\boldsymbol{A}$ と表される (図 3.3 参照).
3. 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の和を $\boldsymbol{C}$ とすると, $\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{A}$ の終点に $\boldsymbol{B}$ の始点を合わせたときの, $\boldsymbol{A}$ の始点と $\boldsymbol{B}$ の終点を結ぶベクトルで作られる. これは, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$

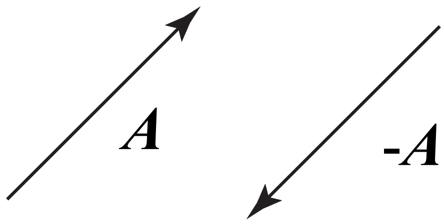

図 3.3 $\boldsymbol{A}$ と $-\boldsymbol{A}$.

の始点を合わせたとき, これら 2 つのベクトルで作られる平行四辺形の対角線である[*2](図 3.4 参照).

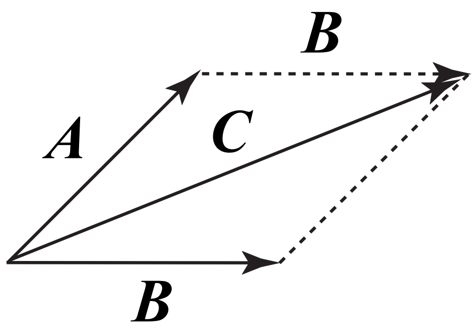

図 3.4 ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

4. ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ との差 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ ベクトルに $-\boldsymbol{B}$ ベクトルを足したものである. 即ち, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$ である. これは $\boldsymbol{B}$ ベクトルの終点から $\boldsymbol{A}$ の終点に向かうベクトルに等しい (図 3.5 参照).

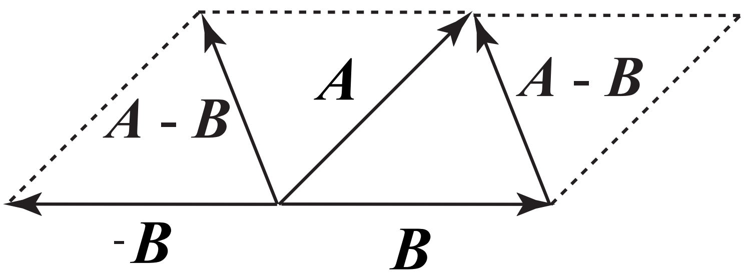

図 3.5 ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の差 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

5. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ ならば, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ はゼロベクトルで $\boldsymbol{0}$ と表される. ゼロベクトルは大きさは

[*2] 平行四辺形の法則とも呼ばれる.

ゼロで向きは定義できない.[*3]

6. ベクトル $\boldsymbol{A}$ とスカラー p との積はベクトルであり, $p\boldsymbol{A}$, もしくは $\boldsymbol{A}p$ と書く.[*4] その大きさは $|p|A$ で向きは $p>0$ のときは $\boldsymbol{A}$ と同じ向き, $p<0$ のときは $\boldsymbol{A}$ と逆向きである. $p=0$ なら $p\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ である.

■ベクトルの代数の法則　$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ がベクトルで, p と q がスカラーとする. このとき以下の法則が成り立つ[*5]:

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$: 和に関する可換則
2. $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$: 和に関する結合則
3. $p(q\boldsymbol{A})=(pq)\boldsymbol{A}$: 積に関する結合則
4. $(p+q)\boldsymbol{A}=p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{A}$: 分配則
5. $p(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=p\boldsymbol{A}+p\boldsymbol{B}$: 分配則

3.3　単位ベクトル

単位の長さ（長さが 1）のベクトルは, 単位ベクトルと呼ばれる. 長さ $A(>0)$ を持つベクトルを $\boldsymbol{A}$ とする. このとき, $\boldsymbol{A}$ をその大きさで割った $\hat{\boldsymbol{A}}=\frac{\boldsymbol{A}}{A}$ は $\boldsymbol{A}$ と同じ方向を持った長さが 1 のベクトル, 単位ベクトル, である. 単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{A}}$ と大きさ A を用いてベクトル $\boldsymbol{A}$ を表現すると, $\boldsymbol{A}=A\hat{\boldsymbol{A}}$ である.

デカルト座標系の x, y, z 軸の正の方向を向いた単位ベクトルは互いに直交しており, 直交単位ベクトルと呼び, 慣例的にそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ と書く (図 3.6 参照).

3.4　ベクトルの分解

3 次元の任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ はデカルト座標系の原点 O に始点を持つベクトルで表すことができる. O に始点を持つベクトル $\boldsymbol{A}$ の終点の座標を (A_x, A_y, A_z) とする. A_x, A_y, A_z はそれぞれ $\boldsymbol{A}$ の x, y, z 成分と呼ばれる. ベクトルの成分はスカラー量である. さらに, ベクトル $\boldsymbol{A}$ はこれらの成分と単位ベクトルを使って,

*3 ゼロベクトルは高校では $\vec{0}$ と書き, 0 と書かないように教わったと思うが, 太文字でない 0 と表すことも多い.

*4 $p\boldsymbol{A}$ のほうが一般的書き方である.

*5 自分で絵を描いて直感的に上記の法則が成り立つことは容易に確かめられるであろうから, 証明は省略する.

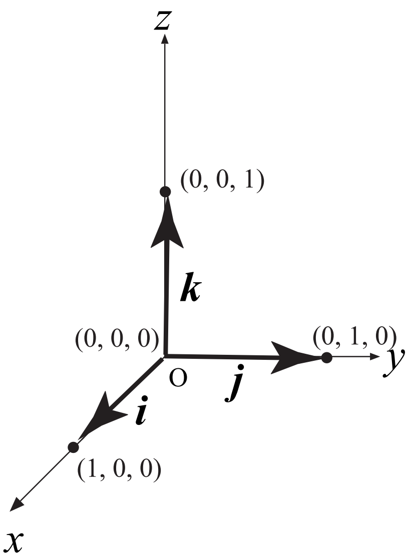

図 3.6　デカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ のデカルト座標系における分解

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_y\boldsymbol{k} \tag{3.1}$$

と書ける．(3.1) は $\boldsymbol{A}$ のデカルト座標系における分解と呼ばれる (図 3.7 参照).

ベクトルの表記法についての注意 (その 2)

ベクトル $\boldsymbol{A}$ の x, y, z 成分がそれぞれ A_x, A_y, A_z であるとき，高校では $\vec{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z)$ と表記した．本講義や大学で使用する多くの教科書, 研究論文ではこのようなベクトル $\boldsymbol{A}$ を単位ベクトルまで付して,

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

と表記する．このような書き方に早く慣れて欲しい．ベクトルを分解するときに単位ベクトルまで含めて書いておくことは次の章で導入するベクトルの微分の最に極めて重要になってくる.

$\boldsymbol{A}$ の大きさはピタゴラスの定理より

$$A = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{3.2}$$

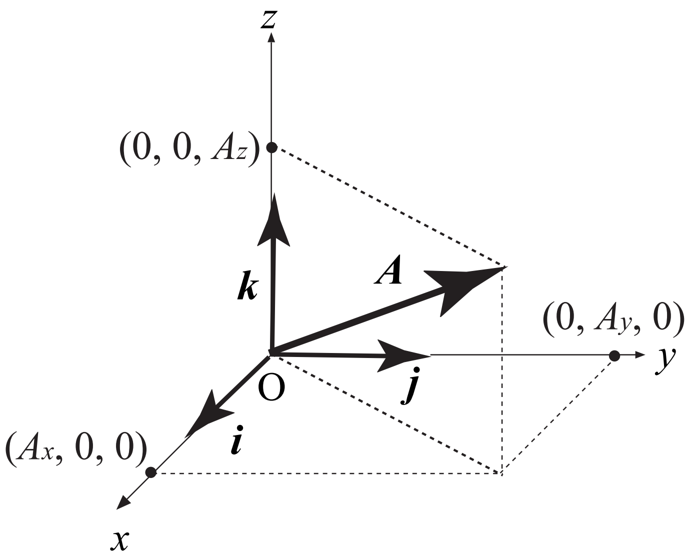

図 3.7　$\boldsymbol{A}$ のデカルト座標系における分解．$\boldsymbol{A}$ の x, y, z 成分はそれぞれ A_x, A_y, A_z である．

である．ベクトル $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ の和は,

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} + (A_z + B_z)\boldsymbol{k} \tag{3.3}$$

である．また $\boldsymbol{A}$ のスカラー倍は

$$p\boldsymbol{A} = pA_x\boldsymbol{i} + pA_y\boldsymbol{j} + pA_z\boldsymbol{k} \tag{3.4}$$

である．もし, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ ならば, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の各成分が等しい．つまり,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \\ &\Longrightarrow A_x = B_x,\ A_y = B_y,\ A_z = B_z. \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.5　物理学の話題に戻って：位置ベクトル

質点の力学では, ある力の作用のもとで運動する質点の位置や速度を, 任意の時刻において知ることが目的の一つである．前章では, 「質点の位置は座標系を使って表す」, と述べたが, ベクトルを使って表現しておくと非常に便利であることが次の章でわかる．座標系の原点と質点の位置とを結ぶベクトルは位置ベクトルと呼ばれ, 慣例的に $\boldsymbol{r}$ と表す．デカルト座標系を採用したときには位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の分解

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{3.6}$$

と書かれる．$\boldsymbol{r}$ は $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ の大きさを持つ．

演習問題

演習問題を解く際のとても重要な注意事項

ベクトル量とスカラー量の記号の区別をきちんとつけてください．以下の 1 の問題でベクトル記号の表記の練習をしたにもかかわらず, その成果が 2 以降の問いで全く活かされていないことがあります．問題文をよく読み, どの量がベクトルか, どの量がスカラーかを読み取り, 適切に文字の書き方を使い分けてください．

1. ベクトル表記の練習をしましょう．アルファベッドの大文字, 小文字, 合わせて 52 文字をベクトル表記しなさい．要するに, 太文字で書いてみる．幼稚に思うかもしれませんが, 文字 (ひらがな, カタカナ, 漢字, アルファベット) を習ったときに沢山練習をしたと思います．練習しないと文字は書けません．ベクトルを書けない人が例年極めて多いので, あえて練習問題にしました．太文字に見えるように自分なりに工夫してみましょう．(例えば, 図 3.8 参照.)
2. デカルト座標系において, $(2, -1, 3)$ を点 P, $(3, 2, -4)$ を点 Q とする．このとき, 以下の問いに答えなさい．
   (a) 原点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ を始点として, P を終点とするベクトルを $\boldsymbol{p}$ とする．$\boldsymbol{p}$ をデカルト座標系で分解しなさい（成分と単位ベクトルを使って表現する）．
   (b) 同様に, 原点 O を始点として, Q を終点とするベクトルを $\boldsymbol{q}$ とする．$\boldsymbol{q}$ をデカルト座標系で分解しなさい（成分と単位ベクトルを使って表現する）．
   (c) P を始点, Q を終点とするベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする．$\boldsymbol{r}$ を デカルト座標系で分解しなさい（成分と単位ベクトルを使って表現する）．
   (d) $\boldsymbol{r}$ の大きさを求めなさい．
3. m をスカラー, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{F}$ は共にベクトルで, それぞれデカルト座標系で

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k},$$

と分解されるとする．ここで, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトルである．もし, m, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{F}$ が

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{3.7}$$

の関係式を満たすとき, 各成分が満たす方程式を答えなさい．[ヒント：(3.4), (3.5) 参照.]

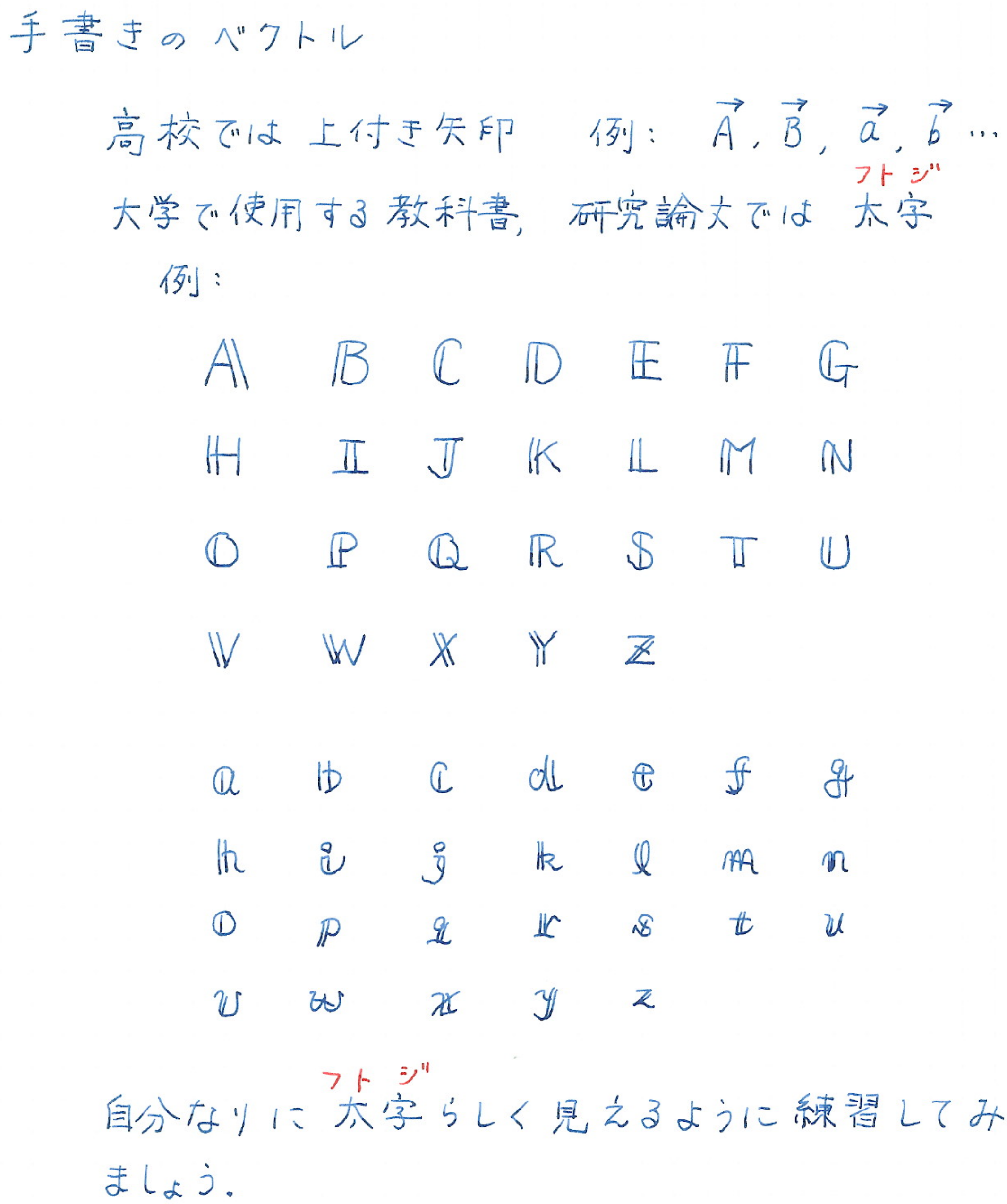

図 3.8　ベクトルの手書き法.

第 4 章

数学の話題：ベクトルの微分

前節で解説したベクトルについて, その微分を定義し, さらに速度と加速度を導入する.

4.1 微分の復習

実数 t を独立変数とするある関数を $f(t)$ とする．独立変数 t は時間を想定している．以降しばしば t を断りなしに時間と呼ぶことがある．物理学では標準的な表記法として時間を t と書き表す．$f(t)$ の t に関する微分とは以下のように定義される量である: t における f の値 $f(t)$ と $t+\Delta t$ における f の値 $f(t+\Delta t)$ との差

$$f(t+\Delta t)-f(t) \tag{4.1}$$

を独立変数の間隔 Δt で割り

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{4.2}$$

さらに $\Delta t \to 0$ という極限を取ったもの

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{4.3}$$

は $f(t)$ の t に関する微分と呼び, $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ と書く．即ち,

スカラー量（スカラー関数）の微分の定義

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{4.4}$$

である．(4.4) における $\equiv$ は「定義」を意味する.[*1] $f(t)$ の t 依存性をしばしば省略して,

[*1] 高校では合同を意味する記号として使用したが, 大学では定義を示す記号として用いられる.

$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ を

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \tag{4.5}$$

と書くこともある．$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ という記号は, これでひとまとまりの記号であり, この記号に引き続く関数を t に関して微分するという意味である．$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ と $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f$ は同じ意味である．

(4.1) は時間間隔 Δt における f の変化量を表している.[*2] さらに, (4.2) は $t \sim t + \Delta t$ の間の f の平均的な変化率 を表している．さらに $\Delta t \to 0$ の極限を取ることで, 時刻 t における f の瞬間的な変化率を表してる．

微分の意味の説明として, しばしば曲線の傾きである, という言い方をする．もちろん幾何学的な解釈としてこのことは正しい．別の解釈としてもっと単純に (4.4) を参照すると「微分とは引き算である」ともいえる．計算機を用いて微分を計算する際には $\Delta t \to 0$ という極限が計算機ではとれないので, しばしば微分を

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{4.6}$$

等と引き算で近似してしまう．$\simeq$ はこの記号の両辺の量が大体等しいという意味, もしくは左辺の量が右辺の量に近似できるという意味である．(4.6) は微分の差分近似と呼ばれている．

(4.4) を見るとわかるように $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ も一般に t の関数になっている．要するに, f の瞬間的な変化率は一般に時々刻々変化しているので, t の関数になっているのである．$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ は t の関数なので, それをさらに微分することができる．例えば $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$ は f の t に関する 2 階微分と呼ばれる．$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$ は $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ とも書かれる．

4.2　ベクトルの微分

スカラーの微分と同様にベクトルの微分も次のように定義する．実数 t を独立変数とするあるベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ の微分は

[*2] 変化量をしばしば記号で Δ (大文字のデルタ．アルファベットの D に対応するギリシア文字) と表す．即ち, f の変化量は Δf と表す．このような記号を用いると, (4.2) は $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ と書け, さらに (4.4) ではこの Δ という記号は $\Delta t \to 0$ の極限を取ると, d という記号に置き換わっている．

ベクトルの微分

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t} \tag{4.7}$$

と定義される．ベクトルの微分はベクトルであることを注意しておく.[*3] さらに, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ は (4.7) を参照すると引き続き t の関数になっていることがわかる．$\boldsymbol{A}$ が t に依存するとは, $\boldsymbol{A}$ の大きさも向きも t が変化するとともに変わっていくことを意味し, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ が t に依存しているということは, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ の大きさも向きも t が変化するとともに変わっていくことを意味する．

ベクトル $\boldsymbol{A}$ をデカルト座標系で分解して成分と単位ベクトルを用いて

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

と表現したとき, その微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + A_x\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + A_y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} + A_z\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

となる．第 1 式から第 2 式への変形は, 微分の連鎖律 (1.14) によって成分の微分だけでなく単位ベクトルの微分も行わないといけないことに注意しておく．ただし, デカルト座標系の座標軸の向きは時間に依存せず, 常に同じ方向を向いているので, 従ってデカルト座標系の単位ベクトルは時間に依存しない[*4]．つまり $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = 0$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} = 0$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = 0$ である．あるベクトルの微分をデカルト座標系で分解すると, 単にそのベクトルの成分を微分したものを成分として持つベクトルになるのである．

極座標系や円筒座標系の場合には単位ベクトルが時間と共に方向を変えるので, 単位ベクトルの時間微分はゼロではない．このことは, 後の章で 2 次元極座標系を用いて質点の運動を調べる（単振り子や惑星の運動を調べる）ときに解説する．

4.3　物理学の話題に戻って：変位, 速度, 加速度

時刻 t において, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ で表される点 P にあった質点が, Δt 時間後に位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ で表わされる点 Q に移動したとする (図 4.1 参照). Δt の間の平均的

[*3] ベクトルの差 $\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)$ はベクトルであり, それをスカラ量 Δt で割ってもベクトルになっている．

[*4] 単位ベクトルの大きさは, 単位ベクトルの定義から 1 であるので単位ベクトルの大きさは時間に依存しない．さらに, 座標軸の向きが変わらないので単位ベクトルの方向も時間に依存しない

な質点の速度はベクトルであり, 向きは P から Q に向かい, 大きさは PQ 間の長さを Δt で割ったものである．P から Q に向う向きを持ち, PQ 間の長さを持つベクトル, 即ち, P を始点, Q を終点とするベクトルは, P と Q の位置ベクトルを使って, $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$ と表せる.[*5] そこで Δt の間の平均的な質点の速度は,

$$\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{4.9}$$

となる．さらに, (4.9) において, $\Delta t \to 0$ の極限を取るとそれは時刻 t における質点の瞬間的な速度 $\boldsymbol{v}(t)$ になる．つまり

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

は時刻 t における質点の瞬間的な速度で, したがって速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は微分を用いて

位置ベクトルと速度との関係

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4.10}$$

となる．t に関する依存性は省略して, しばしば

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{4.11}$$

とも書かれる．速度 $\boldsymbol{v}$ はベクトルであることを注意しておく.

$\boldsymbol{v}$ は引き続き t の関数になっていて, 質点の位置と同様に時間とともに $\boldsymbol{v}$ の方向と大きさは変わっていく．時刻 t における瞬間的な速度の変化率, 加速度 $\boldsymbol{a}(t)$, は位置ベクトルから速度を導いたときと同様の議論によって

速度と加速度の関係

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4.12}$$

となる．速度 $\boldsymbol{v}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の間の関係 (4.11) を使うと

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{4.13}$$

と書ける．$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ の記号の意味は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tag{4.14}$$

[*5] 位置ベクトルの変化を変位と呼び, しばしば $\Delta\boldsymbol{r}$ と表す: $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$.

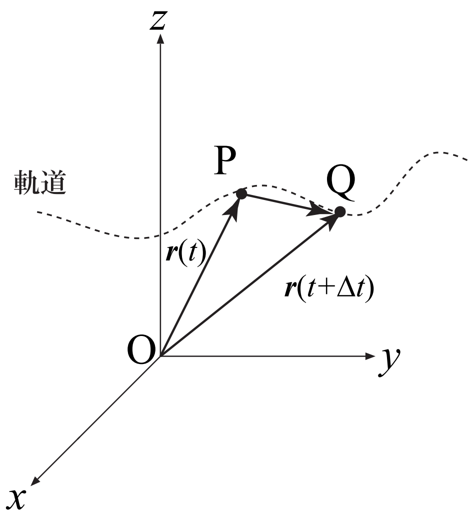

図 4.1　速度の説明図. ある時刻 t に点 P にあった質点が, 時刻 $t+\Delta t$ に点 Q に移動したとする. 破線は質点の軌道を表し, 点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ と表すと, 点 Q の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ である.

と時間微分を2回作用させることを意味する. (4.13) は, 「加速度は位置ベクトルの時間による2階微分で与えられる」, と表現される. 速度と同様に加速度もベクトルであることを注意しておく.

　位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{4.15}$$

のようにデカルト座標系で分解したときの, 速度と加速度の分解は次のようになる：先ず, 速度 $\boldsymbol{v}$ の x, y, z 成分をそれぞれ v_x, v_y, v_z と表すと,

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{4.16}$$

である. 一方, 速度は位置ベクトルの時間微分なので,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{4.17}$$

である. ここで, デカルト座標系の単位ベクトルは時間に依存しないことを用いている.

したがって, (4.16) と (4.17) とを見比べると速度の各成分は

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{4.18a}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \tag{4.18b}$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \tag{4.18c}$$

と表せることがわかる．同様に加速度 $\boldsymbol{a}$ の x, y, z 成分をそれぞれ a_x, a_y, a_z と表すと,

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

である．一方, 加速度は速度の時間微分なので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

である．ここで, 再びデカルト座標系の単位ベクトルは時間に依存しないことを用いている．したがって, $\boldsymbol{a}$ の各成分は

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \tag{4.19a}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \tag{4.19b}$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}. \tag{4.19c}$$

と表せる．さらに (4.18) を用いると

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \tag{4.20a}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, \tag{4.20b}$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}, \tag{4.20c}$$

である．

例：　2 次元平面内を一定の半径 A を保ち, 一定の角速度 ω で円軌道を描いて運動する質点の位置ベクトルは t の関数で,

$$\boldsymbol{r} = A\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + A\sin\omega t\,\boldsymbol{j} \tag{4.21}$$

と表せる．このとき, 質点の速度 $\boldsymbol{v}$ と加速度 $\boldsymbol{a}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + A\sin\omega t\,\boldsymbol{j}\right) \\
&= \left(-\omega A\sin\omega t\right)\boldsymbol{i} + \left(\omega A\cos\omega t\right)\boldsymbol{j}, \qquad (4.22) \\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(-\omega A\sin\omega t\right)\boldsymbol{i} + \left(\omega A\cos\omega t\right)\boldsymbol{j}\right\} \\
&= \left(-\omega^2 A\cos\omega t\right)\boldsymbol{i} + \left(-\omega^2 A\sin\omega t\right)\boldsymbol{j} \\
&= -\omega^2\left(A\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + A\sin\omega t\,\boldsymbol{j}\right) \\
&= -\omega^2\boldsymbol{r} \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

となる．(4.23) は, 円軌道を描いて運動する質点の加速度の向きは, 粒子の位置ベクトルの向きと逆であることを示している．(いわゆる, 向心加速度である.)

演習問題

高等学校の物理基礎の教科書に掲載されている物体の位置と速度を表す公式[*6]が, この章で議論したことと矛盾がないことを確かめてみよう. 即ち, 位置ベクトルを時間に関して微分すると速度に, 速度を時間に関して微分すると加速度になることを確かめてみよう.

演習問題を解く前に注意しておいてほしいこと

ここで掲載する公式を覚えておく必要は全くない. 公式とこの章の議論とに矛盾がないことを確認すること, および, 計算練習をすることがこの演習問題の目的である.

問題を解く前に座標系の設定, ベクトル表記をしましょう: 以下の公式で速度と参照しているものは, ベクトルとしての速度 $\boldsymbol{v}$ のある座標の成分であり, 位置と呼んでいるものも位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ のある座標の成分である. 加速度も同様である. また, 以下の公式では初期時刻 $(t = 0)$ において物体は原点にあると暗黙に仮定されている. 問題を解くにあたり, 先ず自分で座標系を設定し, 正しく位置, 速度, 加速度をベクトル表示しましょう.

1. 等速直線運動：一直線上を一定の速さ v で進む物体の位置 x は

$$x = vt \tag{4.24}$$

である.

2. 等加速度直線運動：一直線上を初速度 v_0 で一定の加速度 a で進む物体の速度 v と位置 x は

$$v = v_0 + at \tag{4.25}$$
$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{4.26}$$

である.

3. 鉛直投げ上げ運動（上向き正）：重力だけが働く環境で, 初速度 v_0 で投げ上げた物体の速度 v と位置 y は

$$v = v_0 - gt \tag{4.27}$$
$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{4.28}$$

である. ここで, g は重力加速度である.

[*6] 植松恒夫 他, 物理基礎 改訂版, 2016 年, p.36 より抜粋.

第 5 章

ニュートンの運動の法則

観測事実, 実験事実などから物体の運動に関してこの章で紹介する三つの法則が成り立っていることが知られており, それらが力学の法則の中で最も基本的なものと考えられている.

5.1 ニュートンの第 1 法則

ニュートンの第 1 法則

> 物体に外部から力が働かなければ, 物体は静止し続けるか, または一直線上を一定の速度で運動し続ける.

物体が持っている静止し続ける, もしくは一定の速度で運動し続ける性質を慣性と呼ぶ. 第 1 法則は「慣性の法則」とも呼ばれる.

速度はベクトル量であるので, 一定の速度とは速度の大きさ (速さ) も向きも時間とともに変化しないことを意味する. 例えば, 一定の速さで一定の半径の円軌道を描いて運動する物体（等速円運動する物体）の速度は, 時間とともに向きが変わっているので, この場合は速度は時間とともに変化している.（前章の 4.3 節の例を参照.） したがって, 一定の速さで一定の半径で円軌道を描いて運動している物体には外力 (この場合は向心力) が働いているのである.（向心力が働かなければ, 円運動できない.）

5.2　ニュートンの第 2 法則

ニュートンの第 2 法則

物体に外部から力が働くと速度が変化し（加速度が生じ）, 物体の加速度は力に比例する.

ニュートンの第 2 法則を具体的に数式で書き表すと

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \tag{5.1}$$

となる．ここで, $\boldsymbol{a}$ は加速度, $\boldsymbol{F}$ は力である．比例定数にあたる m は物体の質量になる. なお, 前章で議論したように, 物体の加速度 $\boldsymbol{a}$ は速度 $\boldsymbol{v}$ の時間 t に関する微分 (時間微分とも呼ぶ), $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$, なので, (5.1) は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{5.2}$$

とも書かれる．さらに, 速度 $\boldsymbol{v}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の時間微分で与えられる ($\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$) ので (5.2) は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \tag{5.3}$$

とも書かれる．(5.1)–(5.3) はどれも運動方程式と呼ばれる.

上で述べたニュートンの第 2 法則（およびその数学的表現 (5.1)–(5.3)）は質量 m が時間に依存しない場合（m が時間と共に変化しない場合）に正しい．質量が時間に依存する場合にも正しい法則は次のようになる:

ニュートンの第 2 法則 (一般の場合)

物体に外部から力が働くと物体の運動量が変化し, 物体の運動量の時間変化率は物体に働く力に等しい.

運動量は質量と速度の積

$$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v} \tag{5.4}$$

で定義される量であり[*1], これを用いて上のニュートンの第 2 法則（一般の場合）を具体的に数式で書き表すと,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}, \tag{5.5}$$

[*1] 運動量は物体の持つ運動の激しさや勢い, 物体が衝突したときの衝撃の大きさを表す一つの指標である.

となる．運動量の定義 (5.4) を (5.5) に代入して, 微分の連鎖律を使って式を変形すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \boldsymbol{F}
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

となる．つまり, $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$ (m が時間と共に変化しない) ならば, (5.6) は (5.3) に帰着される．

この講義では質量が変化するような場合を扱わない．そこで, (5.2) もしくは (5.3) の表現の第 2 法則で充分である．質量が変化するような物体の運動の例としては, 燃料を消費しながら飛ぶロケットの運動が挙げられる．

■第 1 法則と第 2 法則の関係　:

第 1 法則は第 2 法則から導くことができる．(5.2) において $\boldsymbol{F} = 0$ とすると, $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0$ となる．一般に物体の質量はゼロではない ($m \neq 0$) ので, $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0$ を m で割ることにより $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0$ を得る．これは速度が時間に依存しない定数（速度の大きさと向きが時間によって変化しない）, もしくは速度はゼロであることを意味する．即ち, 物体に力が働いていなければ, 物体は一定の速度で運動し続けるか, 静止しているか, のいずれかであり, 第 1 法則は第 2 法則から導かれることになる．

このように述べると, 第 1 法則の重要性が薄れてしまう．第 1 法則が力学の基本法則として位置づけられているより深遠な意味は, 例えば, 砂川重信 著「力学の考え方」2.1 節や 2.2 節に書かれている．この講義ではとりあえず第 1 法則のより深遠な意味には立ち入らないことにする．

■質量の意味について　:

質量がそれぞれ m_1, m_2 (ただし, $m_1 > m_2$) である二つの質点 1 と 2 を考える．これらの質点に同じ力 $\boldsymbol{F}$ が作用して質点が運動しているとする．このとき, 質点 1 と質点 2 の加速度をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ としたとき, 運動方程式より $m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}$,（$i = 1, 2$）なので, $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}/m_i$ を得る．仮定 $m_1 > m_2$ より, $|\boldsymbol{a}_2| > |\boldsymbol{a}_1|$（質点 1 の加速度の大きさが質点 2 の加速度の大きさよりも小さい）が導かれる．つまり, 質量の大きな物体 (今の場合, 質点 1) ほど加速されにくい．このことにより質量の大きさは加速のされ難さの程度（静止状態や一定速度の運動の状態の変え難さ, 即ち, 慣性の大きさ）を表すものと解釈することができる．上記のような意味での質量は慣性質量と呼ばれている．[2]

[2] 物体を手で持った時の重さの感覚に基づいて表した重力質量と呼ばれるものもある．慣性質量と重力質量は精密な実験によって等しいことが確かめられている．

■次元と単位　:

物理学に現れる量（物理量と呼ばれる）には（ほとんど必ず）次元と呼ばれるものを持っている．もしくは次元とは物理量に備わった性質ともいえる．力学における基本的な次元は長さ, 質量, 時間でそれぞれを記号で慣例的に L，M，T と表す．その他の物理量の次元はこれら 3 つから導ける．速度 $\boldsymbol{v}$ の次元をしばしば括弧を使って $[v]$ と書く．このとき $[v]$ は基本的な次元を使うと $[v] = \mathrm{L/T}$ であるし, 加速度 $\boldsymbol{a}$ の次元 $[a]$ は $[a] = \mathrm{L/T^2}$, 力 $\boldsymbol{F}$ の次元 $[F]$ は $[F] = \mathrm{ML/T^2}$ である．

方程式中の各項の次元は必ず等しくなければならない．さらに次元の等しいものどうししか足したり引いたりすることができない．また方程式の両辺の次元も一致していなければならない．（このことから, 力 $\boldsymbol{F}$ の次元 $[F]$ が $[F] = \mathrm{ML/T^2}$ であることがわかる.）

長さ, 時間, 質量の大きさを数値で表すときに用いられる単位にはいくつかのものがあり, 近年ではMKS単位系（もしくは SI 単位系）と呼ばれるものが標準的に採用されている．これは長さ, 質量, 時間をメートル (m), キログラム (kg), 秒 (s) で表す単位系である．MKS 単位系では力の単位はニュートンと呼ばれ N で表され, $\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ である．つまり, 1 N とは運動している 1 kg の物体の速さを 1 秒間に 1 m/s だけ加速させるのに必要な力である.

5.3　ニュートンの第 3 法則

ニュートンの第 3 法則

> 二つの物体が互いに力を及ぼしあう場合, 物体 1 が物体 2 に及ぼす力 $\boldsymbol{F}_{12}$ は, 物体 2 が物体 1 に及ぼす力 $\boldsymbol{F}_{21}$ と大きさは同じであるが向きは反対である.

この法則は「作用・反作用の法則」と呼ばれている.

演習問題[*3]

運動方程式を導入したので, 運動方程式を解いて簡単な物体の運動を考察してみよう. ここでは高等学校の物理基礎で扱った最も簡単な運動を例にとる.

1. 2 次元鉛直面内で何の力の作用も受けずに水平方向に運動する質量 m の物体 (質点) を考える. この物体の任意の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を以下の設問に従って求めなさい.

   座標系の設定: 水平方向にデカルト座標系の x 軸をとる. 物体は水平面上を運動しているので, 物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i}$, 速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は $\boldsymbol{v}(t) = v(t)\boldsymbol{i}$ と表される. ここで, x は物体の位置座標 ($\boldsymbol{r}$ の x 方向成分), $\boldsymbol{i}$ はデカルト座標系の単位ベクトル, v は速度の x 方向成分である.

   初期条件: 物体は, $t = 0$ において, 座標系の原点 $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$, $(x(0) = 0)$, に存在し, 速度は $\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{i}$, $(v(0) = v_0)$, であったとする.

   (a) 物体の運動を支配する運動方程式をベクトル形式で書きなさい. (質量 m と速度ベクトルの時間微分 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ に関する関係式を書きくだす.)

   (b) 運動方程式の x 成分が満たす式を書きなさい. (質量 m と速度ベクトルの時間微分の x 成分 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ に関する関係式を書きくだす.)

   (c) 前節問で得られた方程式を時間 t に関して積分することにより, 速度の x 方向成分 $v(t)$ を時間の関数として書き下しなさい. (この積分は不定積分なので, 積分定数 (任意定数) を含むことに注意しなさい. 積分定数は, 速度に関する初期条件を使って決定する.)

   (d) 前設問で得られた速度の x 方向成分を時間 t に関して積分することにより, 物体の位置 $x(t)$ を t の関数として書き下しなさい. (この積分も不定積分なので, 積分定数 (任意定数) を含むことに注意しなさい. 積分定数は, 位置ベクトルに関する初期条件を使って決定する.)

[*3] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

第 6 章

一様な重力場中の質点の運動

前章で運動方程式が提示されたので, 本章と次章で具体的な力が与えられたときに（微分方程式の形に書かれた）運動方程式を解いて, その力の作用のもとでの物体の運動を考察してみよう.

6.1 目的, 理想化

地球上で起こる日常経験する物体の運動を考察する．物体はもちろん質点と理想化して扱う．その他にも問題を簡単化するために, 以下で述べるいくつかの理想化を行う.

地球上の物体には, 地球による引力が働いている．この引力は重力と呼ばれている．重力の大きさは物体の質量に比例し, その方向は地球の中心を向く方向である．単位質量当たりの物体に働く重力を $\boldsymbol{g}$ と表す.[*1] $1\,\mathrm{kg}$ の物体に働く重力の大きさ $g(=|\boldsymbol{g}|)$ は地球の緯度, 経度, 高度に依存して変化することが知られている．しかしながら, 日常生活で経験するような物体の運動がおこる範囲内では g は定数とみなしてよく, その大きさは $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ である[*2] ここでは重力の大きさ g は定数と仮定する.

さらに, 日常生活で経験する物体の運動がおこる範囲内では地球が球である効果や地球が自転している効果を無視してよく, 物体の運動をデカルト座標系を用いて記述することにする．重力のかかっている方向と平行な方向を鉛直方向 , 重力の向きと逆向きを鉛直上向きと呼ぶ.

このように重力の大きさが一様な場合を, 一様な重力場中と呼ぶ．重力場の「場」とは

[*1] 力なので, ベクトル量であることに注意する.

[*2] 重力の大きさの変化は, 高度に伴う変化が緯度・経度にともなう変化よりも大きい．赤道と極とでは重力の大きさは 0.5 % ほどしか変わらない．一方, 高度 100 km の上空における重力の大きさは地上のその値に比べて 3 % ほど小さくなる．なお, 国際線の飛行機が飛ぶ高さは十数キロメートルである．これらのことから, 日常の生活圏で重力の大きさはほとんど一定とみなしてよいことがわかる．正確な重力の大きさは, 国土地理院の WEB ページ `http://www.gsi.go.jp/`を通じて知ることができる.

物理用語で一般に時間と空間に依存した物理量を場もしくは場の量と呼ぶ．重力は時間には依存しないが, 空間に依存した場の量である．「一様」とは物理学では空間に依存しないという性質を指すときに使用する言葉である．本章では上で述べたように (時間にも) 空間にも依存しない重力が物体に作用している場合を考えるので, 章のタイトルを「一様な重力場」と記述している．

6.2　放物運動

6.2.1　問題設定

一様な重力場中を運動する質量 m の質点の運動を考察する．任意の時刻 t における質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と速度 $\boldsymbol{v}$ が時間 t の関数として表現できれば問題は解けたことになる．質点の運動は簡単化のために鉛直 2 次元平面内で起こるとし, デカルト座標系の y 軸は鉛直上向き, y 軸に直角右向きに x 軸をとる．質点に働く力は重力のみとする．デカルト座標系における位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と速度 $\boldsymbol{v}$ の分解をそれぞれ,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t) &= x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v}(t) &= v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

とする．ここで, x, y はそれぞれ位置ベクトルの x, y 成分, v_x, v_y はそれぞれ速度の x, y 成分, $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ はそれぞれ x, y 方向の単位ベクトルである．以降では, t の関数であることを示す (t) は標記の簡便さから省略する場合がある．(t) が記されていなくても x, y, v_x, v_y は時間の関数であることを意識しておいてほしい．

時刻 $t = 0$ における物体の運動状態は初期条件と呼ばれる．ここでは $t = 0$ における物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(0)$ を座標系の原点, 即ち $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$, に設定する．さらに $t = 0$ における物体の速度, 初速度, $\boldsymbol{v}(0)$, の大きさを V_0 とする．即ち, $|\boldsymbol{v}(0)| = V_0$ であり, 初速度 $\boldsymbol{v}(0)$ と x 軸とのなす角度を θ とする: $\boldsymbol{v}(0) = v_x(0)\boldsymbol{i} + v_y(0)\boldsymbol{j} = V_0 \cos\theta\, \boldsymbol{i} + V_0 \sin\theta\, \boldsymbol{j}$ である．

6.2.2　運動方程式

物体の運動を記述する運動方程式は, 今の問題設定では

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\boldsymbol{g} \tag{6.1}$$

である．ここで, $m \neq 0$ なので (6.1) の両辺を m で割り, さらにベクトルをデカルト座標系で分解すると

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} = -g\boldsymbol{j} \tag{6.2}$$

である.*3 したがって, 運動方程式の x, y 方向の成分はそれぞれ

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0, \tag{6.3a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -g \tag{6.3b}$$

となる.

(6.3) のように微分を含んだ方程式は微分方程式と呼ばれる. 一般に, 微分方程式はその型によって解き方が知られている. (6.3) は最も簡単な微分方程式で単純に両辺を t で積分することで解を求めることができる. 単純に両辺を積分するだけでは解けない型の微分方程式は次章で登場する.

先ず (6.3a) を解いてその解 $x(t)$ を求める. (6.3a) の両辺を t に関して不定積分すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C_1 \tag{6.4}$$

を得る. ここで, C_1 は不定積分に際して現れた任意定数 (積分定数) である. (6.4) の両辺をさらに t で不定積分して

$$x(t) = C_1 t + C_2 \tag{6.5}$$

を得る. ここで C_2 も不定積分に際して現れた任意定数 (積分定数) である.

(6.5) が (6.3a) の解で一般解と呼ばれる. (6.5) のように任意定数を含む微分方程式の解は一般解と呼ばれる. 任意定数の値は初期条件によって決定される. 任意定数の個数と初期条件の個数は一致していないと, 任意定数の値は一意には決まらない. 今考察している問題では, 初期位置と初速度が指定されているので, 初期条件（の x 方向成分）は 2 つあり, 任意定数は一意に決定できることに注意しておく.

任意定数の値を決める前に, (6.3b) の一般解を先に求めておく. 求め方は (6.5) を求める際に行ったやり方と全く同様で, (6.3b) の両辺を t に関して 2 回不定積分すればよい. その結果は

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4 \tag{6.6}$$

である. 再び, C_3, C_4 は任意定数である.

任意定数 C_1, C_2 を決定する. (6.5) において $t = 0$ とおき, さらに初期条件を考慮すると,

$$x(0) = C_2 = 0 \tag{6.7}$$

*3 地球の引力は鉛直下向きなので, $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{j}$ であることに注意する.

を得る. 同様に, $\boldsymbol{v}$ の x 成分 v_x は $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C_1$ なので, この式で $t = 0$ とおき, 初期条件を考慮すると

$$v_x(0) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = C_1 = V_0 \cos\theta \tag{6.8}$$

を得る.*4 以上をまとめると初期条件を満足する (6.3a) の解は

$$x(t) = V_0 \cos\theta\, t$$

である.

同様にして, (6.3b) の一般解に含まれる初期条件も $C_3 = V_0 \sin\theta$, $C_4 = 0$ と決まり, 最終的に初期条件を満足する (6.3b) の解は

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\theta\, t$$

である.

以上をまとめると, 一様重力場中において原点 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ から初速度 $\boldsymbol{v}(0) = V_0 \cos\theta\, \boldsymbol{i} + V_0 \sin\theta\, \boldsymbol{j}$ で運動を始めた物体の運動は, 位置ベクトルの x, y 成分がそれぞれ

$$x(t) = V_0 \cos\theta\, t, \tag{6.9a}$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\theta\, t, \tag{6.9b}$$

であり, 速度の x, y 成分がそれぞれ

$$v_x(t) = V_0 \cos\theta, \tag{6.10a}$$
$$v_y(t) = -gt + V_0 \sin\theta, \tag{6.10b}$$

であることが導けた.

6.2.3 議論

運動方程式を数学的に解いただけでなく, 得られた解からわかる物体の運動の特徴について考察してみよう.

運動方程式 (6.3a) から, 今の問題設定では x 方向には何の力が働いていなかった. この状況は Newton の第 1 法則が適用される状況である. 実際に得られた解 (6.10a) は時間 t に依存せず, 初速度の x 成分と同じ大きさの速度を表している. したがって, 得られた解は Newton の第 1 法則と無矛盾である. (x 方向に関しては等速運動している.)

*4 $\frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t}$ と $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}$ は同じ意味で, $x(t)$ を t に関して微分し, 微分した結果に $t = 0$ を代入するという意味である.

質点の軌道を求めてみる．質点の軌道は (6.9) から t を消去して x と y の関係式を求めることで得られる．(6.9a) から

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\theta} \tag{6.11}$$

を得る．この式を (6.9b) に代入して整理すると

$$y = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta}x^2 + \tan\theta\, x \tag{6.12}$$

を得る．これは $y = ax^2 + bx + c$, (ここで, a, b, c は全て定数) の形をしているので放物線である．特に a に対応する量 $-\frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta}$ が負なので (6.12) は上に凸の放物線である．

物体が放物線の最高点に達する時刻, および最高点の高さを求めてみる．物体の速度は物体が放物線軌道の最高点に達する前は上向き $v_y > 0$, 放物線軌道の最高点に達した後は下向き $v_y < 0$ の速度で運動する．そこで, 放物線軌道の最高点では $v_y = 0$ である．(6.10b) より $v_y = 0$ となる時刻は

$$t = \frac{V_0 \sin\theta}{g} \tag{6.13}$$

と求まる．さらに最高点の高さは (6.13) を (6.9b) に代入し

$$y = \frac{V_0^2\sin^2\theta}{2g} \tag{6.14}$$

となる．

物体が初期位置と同じ高さ $y = 0$ に戻ってくる時刻は, (6.9b) より

$$y = \left(-\frac{1}{2}gt + V_0\sin\theta\right)t = 0 \tag{6.15}$$

から $t = 0$ と

$$t = \frac{2V_0\sin\theta}{g} \tag{6.16}$$

の 2 つである．前者の解（$t = 0$ の解）は初期条件が再び得られたことに対応し, 後者の解 (6.16) がいま求めるものである．この時刻は, 物体が放物線の最高点に達する時刻 (6.13) の 2 倍である．このことは問題設定を考えれば理にかなっているであろう．さらにこの時刻における x 座標, 即ち $y = 0$ が地面だと考えたときの物体の到達距離は

$$\begin{aligned} x &= V_0\cos\theta\left(\frac{2V_0\sin\theta}{g}\right) = \frac{2V_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} \\ &= \frac{V_0^2\sin 2\theta}{g} \end{aligned} \tag{6.17}$$

である．V_0 が一定のもとでこの距離を最大にするには $\sin 2\theta = 1$ となる θ を初期条件として物体を運動させればよい．その値は $2\theta = \pi/2$, 即ち $\theta = \pi/4$, つまり水平面と $45°$ の角度で物体を打ち出せばよい．

6.3 自由落下

前節の問題と同じ運動方程式に従うが, 初期条件だけが異なる別の運動を考えてみよう．

6.3.1 問題設定

6.2 節と同じ問題設定で, 一様な重力場中を運動する質量 m の質点の運動を考察する．質点の運動は簡単化のために鉛直 2 次元平面内で起こるとし, デカルト座標系の y 軸は鉛直上向き, y 軸に直角右向きに x 軸をとる．物体に働く力は重力のみとする．

初期条件が 6.2 節とは異なり, $\boldsymbol{r}(0) = L\boldsymbol{i} + H\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}(0) = 0$ とする．即ち, 重力の影響のみを受けて, 原点からある水平距離 L, 高さ H のところを出発点にして初速度 0 で落下する物体の運動を考察する．このような問題は自由落下問題とも呼ばれている．

6.3.2 運動方程式

物体の運動を記述する運動方程式は, 今の問題設定では (6.1) と同じで, したがってその一般解も同じである:

$$x(t) = C_1 t + C_2, \tag{6.18a}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4. \tag{6.18b}$$

ここで C_1, C_2, C_3, C_4 は任意定数である．初期条件を考慮して, これらの任意定数を決定すると

$$C_1 = C_3 = 0,\ C_2 = L,\ C_4 = H$$

を得る．即ち, 初期条件を満足する運動方程式の解は

$$x(t) = L, \tag{6.19a}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H \tag{6.19b}$$

となる．今の問題設定は, x 方向には第 1 法則が成り立つ場合で, しかも初速度 0 なので, 質点は $x = L$ のところに居続ける．一方, y 方向には重力の作用を受けて落ちていく．

6.4　モンキーハンティング

これまでに議論してきた放物運動と自由落下を同時に考えてみる．

6.2, 6.3 節と同じ問題設定で, 一様な重力場中を運動する 2 つの質点（質量 m_1 の質点 1 と質量 m_2 の質点 2）の運動を考察する．質点の運動は簡単化のために鉛直 2 次元平面内で起こるとし, デカルト座標系の y 軸は鉛直上向き, y 軸に直角右向きに x 軸をとる．物体に働く力は重力のみとする．

初期条件は質点 1 に関しては 6.2 節とおなじ, 質点 2 については 6.3 節と同じとする．ただし,

$$\tan\theta = H/L \tag{6.20}$$

とする．

質点 1 はハンターが打つ弾丸を, 質点 2 はハンターの標的のサルで，ハンターがサルをめがけて弾を打ったと同時に木の上にいたサルが自由落下を始める, というような設定である．果たして弾をサルに当てるにはどのようにしたらいいであろうか．

初期条件を満足する運動方程式の解[*5]は, これまでの解を参照すると

$$x_1(t) = V_0\cos\theta t, \tag{6.21a}$$
$$y_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\sin\theta t, \tag{6.21b}$$

$$x_2(t) = L, \tag{6.22a}$$
$$y_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H \tag{6.22b}$$

である．

質点 1 と 2 が衝突するためには, 2 つの質点の x 座標が一致する $(x_1 = x_2)$ 必要がある．そこで

$$V_0\cos\theta t = L$$

より質点 1 が L に到達する時刻

$$t = \frac{L}{V_0\cos\theta} \tag{6.23}$$

*5 位置ベクトルの成分 x, y に付く下付きの添え字は質点の番号を表す．例えば x_1, y_1 は質点 1 の位置ベクトルの x, y 成分である．

が求まる．この時刻における質点 1 と 2 の y 座標を求めてみる．

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{L}{V_0\cos\theta}\right)^2 + V_0\sin\theta\left(\frac{L}{V_0\cos\theta}\right) \\ &= -\frac{gL^2}{2V_0^2\cos^2\theta} + L\tan\theta. \end{aligned} \tag{6.24}$$

いっぽう，

$$\begin{aligned} y_2 &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{L}{V_0\cos\theta}\right)^2 + H \\ &= -\frac{gL^2}{2V_0^2\cos^2\theta} + H. \end{aligned} \tag{6.25}$$

ここで (6.20) を考慮すると $y_1 = y_2$ となる．即ち，質点 1 と 2 は (6.23) の時刻において必ず衝突するのである．

■議論　なぜ衝突するのか．もし重力が働いていなければ[*6]，質点 2 は静止したままで，質点 1 は 2 に向かう直線軌道をたどるので衝突する．(6.24)，(6.25) の右辺第 2 項が一致するのはそのためである．一方，重力が働いているときには，質点 1 の軌道は，重力が働いていないときの軌道 (慣性軌道と呼ばれる)，即ち直線軌道，からずれる．そのズレは (6.24) の右辺第 1 項で表される．一方，質点 2 の慣性軌道，即ち静止状態，からのズレは (6.25) の右辺第 1 項で表される．この 2 つのズレが一致しているのである．より一般的には，一様重力場中における慣性軌道のズレは，初期条件にかかわらず鉛直方向に $-\frac{1}{2}gt^2$ である．つまり鉛直方向の慣性軌道からのズレは，質点 1，2 の両方で任意の時刻で同じなのである．

[*6] $g = 0$ と設定して解を眺めてみる．

演習問題[*7]

運動方程式を導入したので, 運動方程式を解いて簡単な物体の運動を考察してみよう. ここでは高等学校の物理基礎で扱った最も簡単な運動（自由落下の問題）を例にとる.

1. 重力加速度の大きさが g で表される一様な重力の作用のみを受けて運動する質量 m の物体 (質点) を考える. この物体の任意の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を以下の設問に従って求めなさい.

   座標系の設定:　鉛直上向きにデカルト座標系の y 軸をとり, y 座標の向かって右向きに x 軸をとる. 物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$, 速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は $\boldsymbol{v}(t) = v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j}$ と表される. ここで, x と y はそれぞれ物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の x, y 方向成分, $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ はそれぞれデカルト座標系の x, y 方向の単位ベクトル, v_x と v_y はそれぞれ速度 $\boldsymbol{v}$ の x, y 方向成分である.

   初期条件:　物体は $t = 0$ において, 高さ H, 即ち $\boldsymbol{r}(0) = H\boldsymbol{j}$, $(x(0) = 0, y(0) = H)$, に存在し, 速度はゼロ, 即ち $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{0}$, $(v_x(0) = 0,\ v_y(0) = 0)$, であったとする.

   (a) 単位質量の物体に働く重力を $\boldsymbol{g}$ と表すことにする. このとき, 物体の運動を支配する運動方程式をベクトル形式で書きなさい. ただし, 運動方程式を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の 2 階微分を含む形ではなく, 速度 $\boldsymbol{v}$ の 1 階微分を含む形で書き下しなさい. (質量 m と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の時間微分 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$, 重力 $\boldsymbol{g}$ の間に成り立つ関係式を書きくだす. 問題設定や初期条件からわかるように, この問題は自由落下の問題です. 理解を深めるために, 講義や講義ノートでやった方法と少しだけ違う方法で解いてみる練習を想定しています.)

   (b) 運動方程式の各成分が満たす式を書きなさい.

   (c) 前節問で得られた方程式を時間 t に関して積分することにより, 速度の x, y 方向成分 $v_x(t)$, $v_y(t)$ を時間の関数として書き下しなさい.

   (d) 前設問で得られた速度の x, y 方向成分を時間 t に関して積分することにより, 物体の位置 $x(t)$, $y(t)$ を t の関数として書き下しなさい.

[*7] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

第 7 章

調和振動子（その 1）：バネに繋がれた物体の振動

時間発展が三角関数で表されるような変動は単振動もしくは調和振動と呼ばれ, そのような系は調和振動子と呼ばれる．この章と引き続く章では, 調和振動子を考察する. 調和振動の代表的な例は,

1. バネに繋がれた物体の運動（ただし, 振動の振れ幅が小さい場合）
2. 振り子の運動（ただし, 振り子の振れ幅が小さい場合）

が挙げられる．バネに繋がれた物体や振り子の運動（振動現象）は日常的によく目にする現象なので, 素朴な興味としてそれらの運動を物理学で取り扱うことはごく自然であろう. しかしながら, これらを物理学において考える意義は他にもある．物理学では自然現象を理想化し, 簡単な模型（モデル）を構築して, それを調べることによって自然現象を理解しようとする．周期的に振動する現象は自然界に数多くあり, そのような現象を理解するための一つのモデルとして調和振動子が使われるのである.

この章ではさらに, 線形, 重ね合わせといった物理学において重要な概念も導入される.

7.1 問題設定

摩擦のない水平な[*1]テーブルの上にある質量 m の質点の運動を考察する．水平方向にデカルト座標系の x 軸をとる．質点の運動は x 方向のみの 1 次元問題とする．質点にはバネ定数 k の線形バネがつながれていて, 質点にはバネの復元力のみが働いているとする．バネの自然長（バネが伸びも縮みもしていないときの長さ）を座標の原点とする．こ

[*1] 重力の方向に対して垂直な平面.

のとき, 質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i}$ とデカルト座標系で分解したときの x は, $x > 0$ のときはバネが伸びている状態を, $x < 0$ のときはバネが縮んでいる状態を表す.

先ず, x を t の関数として求めることが当面の目標である (図 7.1 参照.)

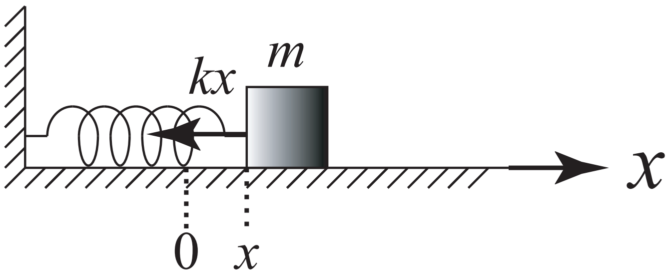

図 7.1　バネ定数 k の線形バネに繋がれた質量 m の物体の運動. 図は自然長からバネが x だけ伸びた状態を表しており, このときバネの復元力は x 軸の負の方向に働き, バネは元の長さに戻ろうする.

7.2　言葉の定義

バネ定数 k の線形バネが質点に及ぼす復元力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = -kx\,\boldsymbol{i} \tag{7.1}$$

と表される. ここで $k > 0$ である. つまり力の大きさはバネの伸び・縮みに比例し, (7.1) の負符号は力の向きが, 質点の位置の変化（変位）と逆向きであることを示している. バネ定数 k はバネの堅さに対応する. 堅いバネは同じ変位に対して強い復元力が生じることが想像できるだろう. 実際に (7.1) によると同じ x に対して k が大きいほど復元力の大きさ $|\boldsymbol{F}| = k|x|$ は大きくなる.

(7.1) のような力とバネの伸び・縮みの間の関係はHooke(フック)の法則とも呼ばれる.*2

*2 一般にバネの及ぼす力は, x の複雑な関数であろう. $\boldsymbol{F} = F(x)\,\boldsymbol{i}$ としたとき, $F(x)$ を $x = 0$ 近傍で Taylor 展開する:

$$F(x) = F(0) + \frac{\mathrm{d}F(0)}{\mathrm{d}x}x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2F(0)}{\mathrm{d}x^2}x^2 + \dots. \tag{7.2}$$

$F(0)$ は自然長のときの復元力で, それはゼロであろう. $\mathrm{d}F(0)/\mathrm{d}x = -k$, であり x の高次の項（x^2 の以上の項）, は存在するであろうが, x が小さいとき, すなわち質点の変位が小さいときには x の高次の項は無視することができ, (7.1) が成り立つ.

7.3　初期条件

初期条件は $\boldsymbol{r}(0) = x(0)\boldsymbol{i} = A\,\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v}(0) = v_x(0)\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$ とする．ここで, A は定数である．即ち, 初期に質点を A だけ変位させ, 速度ゼロで運動が始まる設定である．(位置ベクトルと速度の成分が満足する初期条件は $x(0) = A$, $v_x(0) = 0$ である.)

7.4　運動方程式

以上の問題設定では, 質点の運動方程式はベクトル形式で

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -kx\,\boldsymbol{i} \tag{7.3}$$

となる．運動方程式の x 成分は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{7.4}$$

である．(7.4) を m で割り, $k > 0$, $m > 0$ を考慮すると

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x \tag{7.5}$$

を得る．ここで

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m}\,(> 0) \tag{7.6}$$

と定義した．(7.5) がいま解くべき微分方程式である．(7.5) は一様な重力場中の運動方程式（微分方程式）のように単純に積分するだけでは解は求められない.[*3] まず, (7.5) を解く前にそれが持つ性質を議論しておく.

7.5　線形微分方程式の性質: 線形, 重ね合わせ

ある微分方程式が次の 2 つの性質を持つとき, その微分方程式は線形微分方程式と呼ばれる：

1. ある微分方程式が 2 つの独立な解, x_1 と x_2, を持つとき,[*4] $x_1 + x_2$ もその微分方程式の解になっている.

[*3] (7.5) を単純に 2 回積分すると, $x(t) = -k\int\left(\int x\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}t$ となる．この問題では x を t の関数として求めたいのであるが, 右辺の積分は x が t のどのような関数であるかを知らなければ積分は実行できない．つまり, (7.5) を単純に積分しただけでは (7.5) の解は求められない.

[*4] $x_1 \neq x_2$ であり, x_1 は x_2 の定数倍ではないことを指す.

2. ある微分方程式の解を定数倍したものも, その微分方程式の解になっている.

実際に, (7.5) が上記の 2 つの性質を持っていることを確かめてみる. 先ず, x_1 と x_2 はそれぞれ (7.5) の解であると仮定すると,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} &= -\omega^2 x_1, \\ \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} &= -\omega^2 x_2\end{aligned}$$

を満たす. そこで,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2(x_1+x_2)}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} \\ &= -\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 \\ &= -\omega^2 (x_1 + x_2)\end{aligned}$$

となり, 確かに $x_1 + x_2$ は (7.5) の解になっている. さらに, c を任意定数として, cx が (7.5) の解になっていることは

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2(cx)}{\mathrm{d}t^2} &= c\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \qquad (7.7) \\ &= c \times (-\omega^2 x) \\ &= -\omega^2 (cx) \qquad (7.8)\end{aligned}$$

であることから確かめられる. つまり, (7.5) は線形微分方程式である.

上記の 1 と 2 の性質は次のように 1 つの文章にまとめられる:

線形微分方程式と解の重ね合わせ

> ある微分方程式が独立な解, x_1 と x_2, を持つとき, c_1 と c_2 を任意定数として $c_1 x_1 + c_2 x_2$ もその微分方程式の解になっていれば, その微分方程式は線形微分方程式と呼ばれ, $c_1 x_1 + c_2 x_2$ は解の重ね合わせと呼ばれる.

線形微分方程式はいくつかの特有の形を持ち, その形に応じて解析的に解く方法[*5]が知られている. 一方, 線形でない微分方程式は非線形微分方程式と呼ばれ, それらが解ける例は限られている. 一般的には非線形微分方程式は解析的には解けない. 大学の授業で扱う微分方程式は, ほとんどの場合, 線形微分方程式である.

[*5] 手で解ける方法, 初等関数で解を表現する方法.

7.6 運動方程式の解：線形微分方程式の解法

(7.5) を解くには, それが線形微分方程式であるという性質を積極的に用いるのである. 微分方程式の独立な 2 つの解を見つければ, それらを重ね合わせて解を構成できるのである. その解は, 任意定数を含むので一般解である.

ここでは推定法[*6]と呼ばれる方法で (7.5) の 2 つの独立な解を見つけてみる. (7.5) の解を

$$x = e^{\lambda t} \tag{7.9}$$

と推定する. (7.9) を (7.5) に代入し, 非自明な解[*7] $(x \neq 0)$ が満たす条件を求めると,

$$\lambda^2 = -\omega^2,$$

もしくは

$$\lambda = \pm i\omega, \tag{7.10}$$

を得る. つまり, (7.10) を (7.9) に戻すと, $x = e^{i\omega t}$（これを先の議論の x_1 と考える） と $x = e^{-i\omega t}$（こちらを先の議論の x_2 と考える）という 2 つの独立な解が見つかった. (7.5) は線形の微分方程式なので, これらを重ね合わせた

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \tag{7.11}$$

も (7.5) の解である. ここで c_1, c_2 は任意定数である. この解は任意定数を含むので, (7.5) の一般解である. 実際に (7.11) を (7.5) に代入することで解になっていることが確かめられる.

以下では初期条件を満足するように c_1, c_2 を決定する. 初期位置 $x(0) = A$ より

$$x(0) = c_1 + c_2 = A, \tag{7.12}$$

さらに (7.11) を t に関して微分したものは速度の x 方向成分 v_x である:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = i\omega\left(c_1 e^{i\omega t} - c_2 e^{-i\omega t}\right). \tag{7.13}$$

この式に $t = 0$ を代入し, さらに初速度はゼロ（$v_x(0) = 0$）であることを考慮すると

$$v_x(0) = i\omega(c_1 - c_2) = 0, \tag{7.14}$$

[*6] この呼び方は, 私が大学 1 年生の時に受講した「物理数学」の授業で登場した. この呼び方は, 方法をよく表しているのだが, 一般的には通用しないので, 使用する際には注意が必要である.

[*7] 任意の時刻で $x = 0$ となる解は確かに微分方程式 (7.9) の解になっているが, このような解は当たり前の解, もしくはつまらない解, であり自明な解と呼ばれる. 一方自明でない解は非自明な解と呼ばれる.

を得る.(7.12) と (7.14) から,

$$c_1 = c_2 = \frac{A}{2}, \tag{7.15}$$

が得られ, これらを (7.11) に代入して Euler の公式を使用して整理すると, 初期条件を満足する (7.5) の解が得られる:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2}e^{i\omega t} + \frac{A}{2}e^{-i\omega t} \\ &= \frac{A}{2}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + \frac{A}{2}(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\ &= A\cos\omega t. \end{aligned} \tag{7.16}$$

7.7　解の性質

(7.16) において $|A|$ は振幅と呼ばれる．なぜならば余弦関数 $\cos\theta$ は ± 1 の範囲に収まるので, (7.16) で表される質点の運動は変位の絶対値が $|A|$ の範囲に収まるからである．さらに余弦関数は 2π 周期（$\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi)$）であることから, 次のような時刻 T が存在するはずである:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega t \\ &= A\cos(\omega t + 2\pi) \\ &= A\cos[\omega(t+T)] \\ &= x(t+T). \\ &\therefore \quad \omega T = 2\pi. \end{aligned} \tag{7.17}$$

つまり, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ だけ時間が経つと質点の変位は元に戻る．この T は周期と呼ばれる．ω は振動数と呼ばれる.[*8] 1 周期 T だけ時間が経つと, 振動が 1 回終わるので, 逆に 1 秒間の振動の回数は $1/T = \omega/(2\pi)$ で与えられるからである．

この問題で見たように調和振動子の振動の周期 $T(= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}})$ や振動数 $\omega(= \sqrt{\frac{k}{m}})$ は振幅 $|A|$ に依存しない．Hooke の法則が成り立つ範囲であれば, 初期振幅をどのように選ぼうと振動の周期は変わらない（質点の質量 m とバネの堅さ k によって決まる）のである．この性質は, 調和振動子の最も重要な性質である．実際に異なる初期条件のもとで問題を解いてこのことを確かめてみよう (演習問題参照).

7.8　議論

運動方程式を解いて得られた解の性質をもう少し議論してみる．

[*8] 角振動数とも呼ばれる．

先ず, (7.16) を t に関して微分すると速度の x 方向成分 $v_x(t)$ が得られる:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega \sin \omega t. \tag{7.18}$$

三角関数は $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ という性質を満足することから, (7.16) と (7.18) より

$$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = \left(\frac{v_x}{A\omega}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1 \tag{7.19}$$

を得る．$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ に注意し, 上式の中辺と右辺を変形すると

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \tag{7.20}$$

となることがわかる．上式は, 左辺の量が時間に因らず初期条件で決まったある一定の値 $\frac{1}{2}kA^2$ に常に保たれていることを示している．物理学では時間に依存しない量は保存量と呼ばれる．(7.20) は $\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$ が保存量であることを述べている．この量は今考えた初期条件と異なる初期条件のもとでの解でも, 保存量になっている (演習問題参照)．後で見るように, この量はエネルギーと呼ばれるものである．運動方程式を出発点としたエネルギーに関する議論は後の章で使う．

演習問題[9]

1. 実数 t の関数 $x(t)$ が従う次のような微分方程式は, 物理学の問題でよく現れる形のものである:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Bx = 0. \tag{7.21}$$

   ここで A, B は定数である. (7.21) は, 定数係数の2階線形微分方程式と呼ばれるものである. 微分方程式に含まれる微分の階数は 2 階微分 (左辺第 1 項) が最高階なので「2 階...」と呼ばれる.[10] さらに, 係数の A, B が定数であることから, 「定数係数の...」と呼ばれる.

   (7.21) が線形微分方程式であることを確かめなさい. (ヒント : x_1, x_2 が (7.21) の独立な解だと仮定したとき, c_1, c_2 を任意定数として $c_1x_1 + c_2x_2$ も (7.21) の解になっていることを確かめればよい.)

2. 授業で扱った単振動の問題を演習問題として解いてみよう. ただし, 授業とは異なる初期条件を設定する.

   問題設定: 摩擦のない水平なテーブルの上にある質量 m の質点の運動を考察する. 質点にはバネ定数 k の線形バネがつながれていて, 質点にはバネの復元力のみが働いているとする.

   座標系の設定: 水平方向にデカルト座標系の x 軸をとる. 質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i}$, 速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は $\boldsymbol{v}(t) = v_x(t)\boldsymbol{i}$ と表される. ここで, x は質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の x 方向成分, $\boldsymbol{i}$ はデカルト座標系の x 方向の単位ベクトル, v_x は速度 $\boldsymbol{v}$ の x 方向成分である.

   初期条件: 質点は $t = 0$ において, バネの自然長の位置, 即ち $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$, $(x(0) = 0)$ にあり, 速さは V_0, 即ち $\boldsymbol{v}(0) = V_0\boldsymbol{i}$, $(v_x(0) = V_0)$, であったとする.

   このとき, この質点の任意の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を以下の設問に従って求めなさい.

   (a) 質点の運動を支配する運動方程式をベクトル形式で書きなさい. (質量 m と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$, 復元力の間に成り立つ関係式を書きくだす.)

   (b) 運動方程式の x 成分が満たす式を書きなさい.

   (c) 前節問で得られた方程式を解いて, 一般解を求めなさい.

---

[9] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

[10] 因みに, 左辺第 2 項は x の 1 階微分, 左辺第 3 項は 0 階微分である.

(d) 前設問で得られた $x(t)$ に含まれる任意定数を初期条件を利用して決定し, 初期条件を満たす運動方程式の解 $x(t)$ と $v_x(t)$ を求めなさい.

(e) この振動運動の振幅と周期を答えなさい.

(f) 得られた解から $\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$ が時間に依存せず, 初期条件のみに依存することを示しなさい.

第 8 章

調和振動子（その 2）：振り子の運動

調和振動子の別の例として, 振り子の運動を考察する. 振り子の振れ角が小さい範囲に留まっている場合[*1]には, 振り子の運動も, 前節で考察して線形バネにつながれた物体の運動がしたがう運動方程式と同じ形の運動方程式によって支配される. したがって, このような場合でも振り子の運動も単振動である.

一様重力場中の物体の運動やバネに繋がれた物体の運動ではデカルト座標系を用いて現象を記述してきた. しかしながら, 振り子の運動には極座標系を用いるほうが便利である. そこでこの節では 2 次元極座標系の導入も行う.

8.1　問題設定

伸び縮みしない質量の無視できる長さ l の紐の片端に, 質量 m の質点がむすびつけられており, 鉛直 2 次元平面内において, 紐のもう一方の端を支点とした紐のたるみがない状態で起こる質点の運動を考察する. 座標の原点 O を支点にとり, 鉛直下向きをデカルト座標系の x 軸の正の方向, それと垂直左向きに y 軸の正の方向をとる. 質点に働いている力は, 紐の張力 $\boldsymbol{T}$ と重力のみ (重力加速度を $\boldsymbol{g}$) とする (図 8.1 参照).

質点の運動は, 支点 O を中心とする半径 l の円の円弧の一部を軌道とするような運動となることが予測される. このような運動を考察するのに便利な座標系は, 次節で説明する 2 次元極座標系である.

8.2　2 次元極座標系

振り子の問題からいったん離れて, 2 次元平面内を自由に運動する質点を考える. ある瞬間における質点の位置を点 P とする. 座標の原点を O とし, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向は動径方向, 動径

[*1] 微小振幅と呼ばれる場合

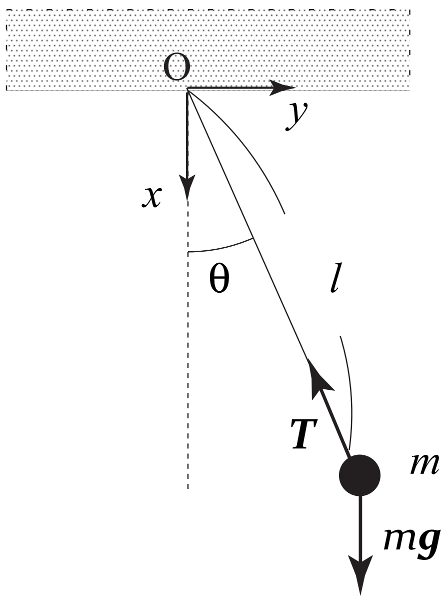

図 8.1　伸びない長さ l のひもの一端に繋がれた質量 m の物体が鉛直面内において紐のたるみがない状態で運動する様子．鉛直方向からのひもの振れ角を θ とする．

方向と直角左向きは方位角方向と呼ばれる．動径方向の距離を $r \equiv |\mathrm{OP}|$, 単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$ と表す．OP と x 軸のなす角を方位角といい, それを θ で表し, 方位角方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\theta$ とする．定義により $r > 0$ であり, $\theta > 0$ は反時計回りの回転角, $\theta < 0$ は時計回りの回転角を表す (図 8.2 参照).

2 次元極座標系は r と θ を使って空間中の点の位置を表す座標系である．デカルト座標系との大きな違いは, デカルト座標系の単位ベクトルの方向は動かないのに対して, 極座標系の単位ベクトルの向きは時間と共に変わることである．このことは, ある瞬間における質点の位置を基準にして動径方向と方位角方向を決めているので, 時間がたって質点の位置が変わると, デカルト座標系に対して動径方向と方位角方向の向きが変わることから想像できるであろう (図 8.2 参照)．つまり, 2 次元極座標系の単位ベクトルは時間の関数である．$\boldsymbol{e}_r(t)$, $\boldsymbol{e}_\theta(t)$ と書くのがより親切かもしれないが, 煩雑なので単に $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ と書くのが慣例である．

2 次元極座標系における運動方程式を導くための準備をする．質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は 2 次元極座標系で分解すると, 定義により

$$\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{e}_r \tag{8.1}$$

である．運動方程式を 2 次元極座標系において分解するためには, $\boldsymbol{r}$ の時間に関する 2 階微分 $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ を 2 次元極座標系で分解する必要がある．それを計算するためには, 2 次元極座標の単位ベクトルの時間微分 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$ を知る必要がある．以下では, 幾何学的にそれを求

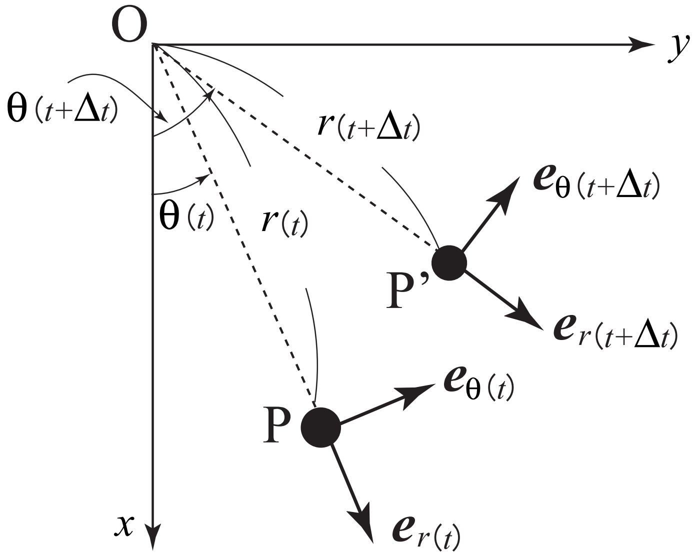

図 8.2　2 次元極座標の単位ベクトル．動径方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$ と方位角方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\theta$ は時間と共に向きが変わる．

めてみる．計算による求め方は, 演習問題として章末に用意されている．

ある時刻 t における質点の位置を P, $t+\Delta t$ における質点の位置を P' とする．$|\mathrm{OP}| = r$, $|\mathrm{OP'}| = r + \Delta r$, $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ から反時計回りに $\Delta\theta(\equiv \theta(t+\Delta t) - \theta(t))$ だけ回転しているとする．このとき, $\boldsymbol{e}_r$ の時間微分は微分の定義と $\boldsymbol{e}_r(t)$, $\boldsymbol{e}_r(t+\Delta t)$ の幾何学的関係を考慮すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r(t)}{\mathrm{d}t} &\equiv \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{e}_r(t+\Delta t) - \boldsymbol{e}_r(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\theta\,\boldsymbol{e}_\theta(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t}\boldsymbol{e}_\theta(t) \\
&= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

となる (図 8.3 参照)．第 1 式から, 第 2 式への変形は $\boldsymbol{e}_r(t+\Delta t) - \boldsymbol{e}_r(t)$ はベクトルであり, その大きさは $\boldsymbol{e}_r(t+\Delta t)$ と $\boldsymbol{e}_r(t)$ とが角度 $\Delta\theta$ だけズレていることから, ($\Delta t \to 0$ の極限で) 半径が 1 で中心角が $\Delta\theta$ の円弧の長さに等しいこと, さらに, $\boldsymbol{e}_r(t+\Delta t) - \boldsymbol{e}_r(t)$

の向きは ($\Delta t \to 0$ の極限で) $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向であることによって行われている. 同様にして

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta(t)}{\mathrm{d}t} &\equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{e}_\theta(t+\Delta t) - \boldsymbol{e}_\theta(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta(-\boldsymbol{e}_r(t))}{\Delta t} \\
&= -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t}\boldsymbol{e}_r(t) \\
&= -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r(t)
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

を得る.

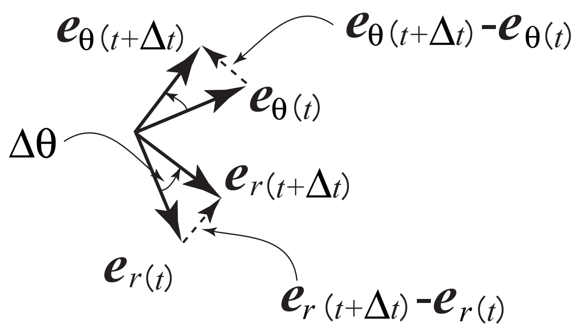

図 8.3　2 次元極座標系の単位ベクトルの Δt の間における変化. 単位ベクトルの微分を考えるために, 異なる時刻における単位ベクトルの始点を一致させて図を描いている.

以上の関係式を考慮すると, 速度と加速度の 2 次元極座標系における分解が求められる. 先ず, 速度 $\boldsymbol{v}$ の 2 次元極座標系における分解を

$$
\boldsymbol{v} = v_r \boldsymbol{e}_r + v_\theta \boldsymbol{e}_\theta
$$

と表すことにする. v_r, v_θ はそれぞれ速度 $\boldsymbol{v}$ の動径方向成分, 方位角方向成分である. 一方, 速度は位置ベクトルの時間微分であることから, 微分の連鎖律と単位ベクトルの微分に注意して,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}(r\boldsymbol{e}_r)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

を得る. つまり, 速度の動径方向成分と方位角方向成分はそれぞれ

$$
v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \tag{8.5a}
$$

$$
v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{8.5b}
$$

である.

次に, 加速度 $\boldsymbol{a}$ の 2 次元極座標における分解を

$$\boldsymbol{a} = a_r \boldsymbol{e}_r + a_\theta \boldsymbol{e}_\theta$$

と表すことにする. a_r, a_θ はそれぞれ加速度 $\boldsymbol{a}$ の動径方向成分, 方位角方向成分である. 一方, 加速度は速度の時間微分であることから, 微分の連鎖律と単位ベクトルの微分に注意して,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_r + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_\theta + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} \\
&= \left\{\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\boldsymbol{e}_r + \left\{2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right\}\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned} \tag{8.6}$$

である. つまり, 加速度の動径方向成分と方位角方向成分はそれぞれ

$$a_r = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2, \tag{8.7a}$$

$$a_\theta = 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{8.7b}$$

である.

8.3 運動方程式

問題設定に従って振り子の運動の運動方程式をたて, それを 2 次元極座標系で分解する. 紐の張力 $\boldsymbol{T}$ は 2 次元極座標で分解すると

$$\boldsymbol{T} = -T\boldsymbol{e}_r, \tag{8.8}$$

と書ける. ここで T は張力の大きさであり, $T > 0$ を満たす. 図 8.1, 8.2 を参照すると, 重力を 2 次元極座標系で分解すると

$$\boldsymbol{g} = g\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r - g\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta, \tag{8.9}$$

であることがわかる. したがってベクトル形式の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} \tag{8.10}$$

を 2 次元極座標で分解すると, 紐は伸びないので $r = l$(一定), $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = 0$ に注意して

$$m\left[-l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 \boldsymbol{e}_r + l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_\theta\right] = (-T + mg\cos\theta)\,\boldsymbol{e}_r - mg\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta, \tag{8.11}$$

となる. 動径方向成分, 方位角方向成分の運動方程式はそれぞれ

$$-ml\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -T + mg\cos\theta, \tag{8.12a}$$

$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\sin\theta, \tag{8.12b}$$

である. この問題における未知変数は θ のみであることに注意してく. [*2] つまり, θ を時間の関数で表現することができれば, 振り子の運動は理解できたことになる. 動径方向には質点は動いていない (常に $r = l$ の位置にある). それゆえ質点に働いている力は動径方向には釣り合っている筈である. 実際に運動方程式の動径方向成分 (8.12a) の式を

$$\begin{aligned} &ml\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - T + mg\cos\theta \\ =&\frac{mv_\theta^2}{r} - T + mg\cos\theta = 0 \end{aligned}$$

と変形すると, 第 1 項は遠心力 (動径方向正の方向), 第 2 項は紐の張力 (動径方向負の方向), 第 3 項は重力の動径方向成分 (動径方向正の方向) であり, これらの和がゼロになっていることがわかる. (8.12b) を解いて, $\theta(t)$ を求めて (8.12a) に代入すると張力 T が決まる.[*3] そこで, (8.12b) が解くべき微分方程式である. 上で見てきたように, 振り子の問題を極座標を使って扱うと, 問題は θ に関する 1 次元問題 (未知変数が 1 つの問題) になる. これが振り子の運動を極座標系を用いて記述する大きな理由である.

8.4　微小振幅振動

前節で導いた振り子の運動方程式 (8.12b) は非線形の微分方程式である. なぜならば, 例えば (8.12b) の解 θ の任意定数倍 $c\theta$ は, 以下で見るように (8.12b) の解ではないからである:

$$\begin{aligned} l\frac{\mathrm{d}^2(c\theta)}{\mathrm{d}t^2} &= cl\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \\ &= c\times(-g\sin\theta) \\ &\neq -g\sin(c\theta). \end{aligned} \tag{8.13}$$

[*2] 2 次元極座標系を採用したので, 一般的には質点の位置は (r, θ) の 2 つの変数で指定されるが, $r = l$ なので極座標を使えば未知変数は θ の一つになる.

[*3] 張力 $\boldsymbol{T}$ はあらかじめその値が与えられているわけではなく, 運動方程式から然るべく決められるのである.

ここで, c は任意定数である．(8.12b) は実は解ける非線形微分方程式の 1 つの例で, 解は楕円関数と呼ばれるもので表現できることが知られている．しかしながら, ここではこの微分方程式を解くことは考えず, 振り子の振幅が小さい場合 (微小振幅振動) を考えることにする．$|\theta| \ll 1$ のときには正弦関数は

$$\sin\theta \simeq \theta \tag{8.14}$$

と近似することができるので, このときには (8.12b) は次のように近似できる:

$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\theta. \tag{8.15}$$

これは, 前節で議論したバネ定数 k の線形バネに繋がれた物体が従う運動方程式と数学的に同じ形である:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta, \tag{8.16}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{8.17}$$

例えば, 初期条件 $\theta(0) = \theta_0$, $\frac{\mathrm{d}\theta(0)}{\mathrm{d}t} = 0$ を満たす (8.16) の解は $\theta(t) = \theta_0 \cos\omega t$ であり, 振動の周期 T は $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$ で与えられて, T は初期振幅 θ_0 には依存しないことがわかる．振り子のこのような性質は振り子の等時性と呼ばれ, ガリレオ（Galileo）が発見した性質である．

8.5 Taylor 展開

(8.14) の近似をより一般的な立場, Taylor 展開もしくは Maclaurin 展開とも呼ばれる関数の近似法, から議論する．

無限階微分可能な任意の関数 $f(x)$ は $x = a$ の周りで

Taylor 展開

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}(x-a) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 f(a)}{\mathrm{d}x^2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n f(a)}{\mathrm{d}x^n}(x-a)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n f(a)}{\mathrm{d}x^n}(x-a)^n \end{aligned} \tag{8.18}$$

と書ける．(8.18) は $f(x)$ の $x = a$ の周りのTaylor展開と呼ばれる．(8.18) において $a = 0$ の場合は特別にMaclaurin展開と呼ばれる．以下では Maclaurin 展開も含めて Taylor 展

開と呼ぶことにする．$\frac{\mathrm{d}^n f(a)}{\mathrm{d}x^n}$ は $f(x)$ を x に関して n 階微分し，その結果に $x=a$ を代入する，という意味である．

Taylor 展開は，任意の関数を n 次多項式で近似することを意味している．例えば，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{8.19}$$

と n 次までの多項式で表現したとする．ここで，c_n は x に依存しない定数である．このとき，c_n をどのように選んだらよいであろうか．$x=a$ を両辺に代入すると $c_0 = f(a)$ を得る．次に，(8.19) の両辺を x で 1 階微分して，その結果に $x=a$ を代入すると，$c_1 = \frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}$ を得る．さらに (8.19) の両辺を x で 2 階微分して，その結果に $x=a$ を代入すると，$c_2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f(a)}{\mathrm{d}x^2}$ を得る．このように次々に両辺を微分して $x=a$ を代入すると，c_n が決まり，最終的に (8.18) が導ける．

代表的な関数の $x=0$ の周りの Taylor 展開をいくつか書き下しておく:

- 指数関数：e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots . \tag{8.20}$$

  指数関数と指数関数の $x=0$ の周りの Taylor 展開を図 8.4 に示す．Taylor 展開は，展開を x の 1 次まで，2 次まで，3 次までで打ち切った場合を示している．$x=0$ の近傍で Taylor 展開がもとの関数をよく近似しており，展開の次数が高くなればより近似が良くなることが見て取れる．正弦関数，余弦関数の場合も同様である．

- 正弦関数：$\sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots . \tag{8.21}$$

  正弦関数と正弦関数の $x=0$ の周りの Taylor 展開を図 8.5 に示す．Taylor 展開は，展開を x の 1 次まで，3 次まで，5 次までで打ち切った場合を示している．

- 余弦関数：$\cos x$

$$\cos x = 1 - x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots . \tag{8.22}$$

余弦関数と余弦関数の $x=0$ の周りの Taylor 展開を図 8.6 に示す．Taylor 展開は，展開を x の 2 次まで，4 次まで，6 次までで打ち切った場合を示している．(8.20) において $x = i\theta$ とおいて，展開を実部，虚部に分けて整理すると Euler の公式が確かめられる．

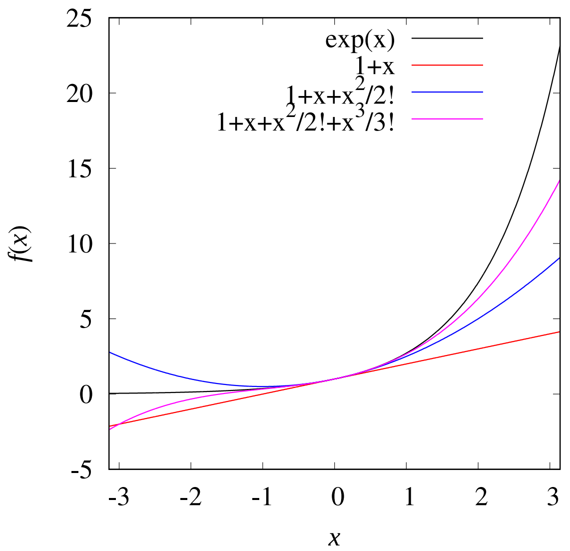

図 8.4　指数関数 (黒実線) とその Taylor 展開の比較．指数関数の Taylor 展開を x の 1 次までで打ち切った場合（赤実線）, x の 2 次までで打ち切った場合（青実線）, x の 3 次までで打ち切った場合（紫実線）を示している．

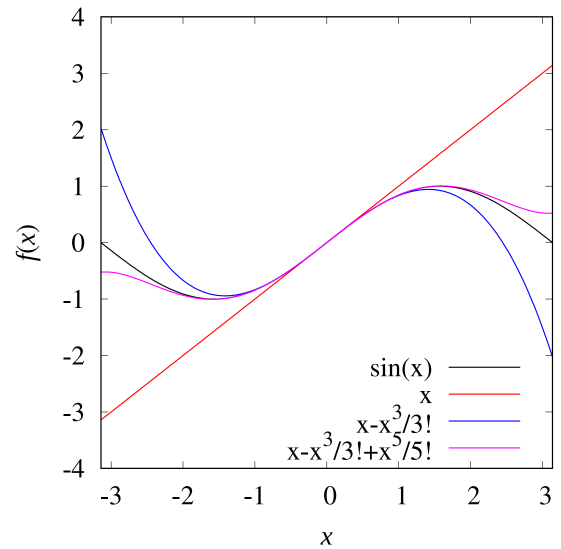

図 8.5　正弦関数 (黒実線) とその Taylor 展開の比較．正弦関数の Taylor 展開を x の 1 次までで打ち切った場合（赤実線）, x の 3 次までで打ち切った場合（青実線）, x の 5 次までで打ち切った場合（紫実線）を示している．

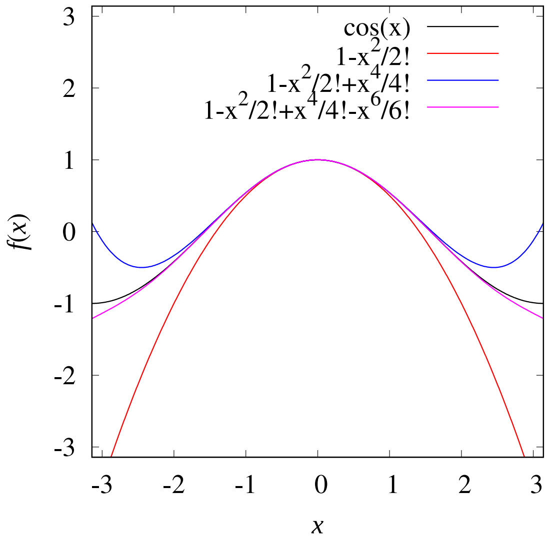

図 8.6　余弦関数 (黒実線) とその Taylor 展開の比較. 余弦関数の Taylor 展開を x の 2 次までで打ち切った場合（赤実線）, x の 4 次までで打ち切った場合（青実線）, x の 6 次までで打ち切った場合（紫実線）を示している.

(8.14) に戻る. (8.21) においてもし $x = 10^{-1}$ だとすると, 第 2 項の大きさは $\mathcal{O}(10^{-3})$, 第 3 項は $\mathcal{O}(10^{-5})$ となる.[*4] したがって, $x = 10^{-1}$ のときには 1% の誤差の範囲で $\sin x = x$ と近似できる.

*4 $\mathcal{O}(a)$ とはオーダー a と読み, せいぜい大きくても a 程度の大きさという意味である.

演習問題

1. 授業では 2 次元極座標系の単位ベクトルの時間微分を図を使用しながら幾何学的, 直感的に導きました. 以下では計算によって導いてみましょう.
   (a) 図 8.2 を参考に, 極座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ と $\boldsymbol{e}_\theta$ をデカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ と θ を用いて書きなさい. (単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ と $\boldsymbol{e}_\theta$ をデカルト座標系において分解する.)
   (b) 前節問で導いた単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ と $\boldsymbol{e}_\theta$ のデカルト座標系における分解を微分しなさい. ここで θ が時間の関数であることに注意しなさい.
   (c) 以上から,
   $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta,$$
   $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r$$
   を導きなさい.
2. 以下の関数を $x = 0$ の周りで Taylor 展開しなさい.
   - 指数関数: e^x
   - 余弦関数: $\cos x$

第 9 章

数学の話題：ベクトルの掛け算, ベクトルの積分, 偏微分

これまでのいくつかの章で, 力 $\boldsymbol{F}$ が具体的に与えられたとき, 運動方程式を座標系の各成分に分解して積分を実行[*1]し, 質点の時々刻々の位置や速度を求めてきた. 引き続く章では力 $\boldsymbol{F}$ が具体的に与えられていない一般的な状況で, 運動方程式をベクトル形式のまま積分するという一般論を展開していく予定である. そのために必要な数学的知識をこの章で解説する.

9.1　ベクトルの掛け算：内積

ベクトルの足し算, 引き算は 3 章で既に導入した. ここではさらにベクトルの掛け算を導入する. ベクトルの掛け算には 2 種類ある. ベクトルどうしを掛けたときスカラー量になる掛け算（内積, もしくはスカラー積と呼ばれる）とベクトルどうしを掛けたときベクトル量になる掛け算（外積, もしくはベクトル積と呼ばれる）の 2 種類である. ここでは前者の内積について解説する.[*2]

9.1.1　内積の定義

二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ があったとき, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積を

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \tag{9.1}$$

と書く.

[*1] 採用した座標系の各成分に分解した運動方程式を, 微分方程式として解くことと等価である.

[*2] 外積は地球圏科学科の授業では後期に開講される力学 II で扱う.

■注意：　$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の中黒 (なかぐろ)「・」を忘れないで付けることが重要である. 例えば掛け算なので「・」の代わりに「×」と書く, 即ち $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ と書くと, これは $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積を表すことになる. また何も記号を付けない場合には, どのような掛け算, 内積なのか外積なのか, が判別できない. 記号は省略せず正しい記号を付けなければならない.

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ は次のように定義される:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \equiv |A||B|\cos\theta. \tag{9.2}$$

ここで, θ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角度である.

9.1.2　内積の性質

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ がベクトル, p がスカラーのとき, 内積の定義 (9.2) から, 内積は次の性質を持つことがわかる:

1. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$. 可換則
2. $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$. 分配則
3. $p(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(p\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot(p\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})p$. 分配則
4. $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が互いに直角ならば, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$.
   - デカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は互いに直交するので, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$ である.
5. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|A|^2$. したがって, $|A|=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$.
   - デカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ大きさが 1 なので, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$ である.
6. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ がデカルト座標系で次のように分解できるとき,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{B}&=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積を成分を使って書き下すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\quad&=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\cdot(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}),\\ &=A_xB_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+A_xB_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+A_xB_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\ &\quad+A_yB_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+A_yB_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+A_yB_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\ &\quad+A_zB_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+A_zB_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+A_zB_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\ &=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{aligned} \tag{9.3}$$

となる. つまり $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の同じ成分どうしを掛けて和を取ればよい. この性質は座標系がデカルト座標系以外の直交座標系でも成り立つ性質である. 例えば, 2 次元極

座標系で $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がそれぞれ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&= A_r\boldsymbol{e}_r + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta,\\ \boldsymbol{B}&= B_r\boldsymbol{e}_r + B_\theta\boldsymbol{e}_\theta,\end{aligned}$$

と分解できるとする．ここで $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ はそれぞれ 2 次元極座標系の動径方向の単位ベクトル, 方位角方向の単位ベクトルである．このとき $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ は互いに直交していて大きさが 1 なので[*3]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_r\boldsymbol{e}_r + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta)\cdot(B_r\boldsymbol{e}_r + B_\theta\boldsymbol{e}_\theta)\\ &= A_rB_r\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r + A_rB_\theta\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\theta + A_\theta B_r\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_r + A_\theta B_\theta\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta\\ &= A_rB_r + A_\theta B_\theta\end{aligned}$$

である．確かに, 同じ成分どうしの積の和になっている．

7. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ で $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, $|\boldsymbol{B}| \neq 0$ なら $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ は直交する．

9.2　線積分

9.2.1　定義

あるベクトル $\boldsymbol{A}$ を経路 C に沿って積分する

$$\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{9.4}$$

を $\boldsymbol{A}$ の C に沿っての線積分という．被積分関数はベクトル量であるが, 線積分の結果はスカラー量であることに注意しなさい．内積の定義および, ベクトルをデカルト座標系で分解すると, $\boldsymbol{A}$ の C に沿っての線積分は, デカルト座標系を採用すると

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}} (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k})\cdot(\mathrm{d}x\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{k})\\ &= \int_{\mathrm{C}} A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z \end{aligned}\tag{9.5}$$

である．積分の始点と終点が同じであっても, その途中にどのような経路を取るかによって積分の値が異なる．しかしながら, $\boldsymbol{A}$ がある性質を満足するならば, $\boldsymbol{A}$ の線積分は経路に依存せず, 積分の始点と終点だけに依存するようになる．

[*3] $\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_r = 0$, $\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta = 1$ である．

9.2.2 線積分の具体例

1. $\boldsymbol{A} = (3x^2 - 6y)\boldsymbol{i} + (3x + 2y)\boldsymbol{j}$ を $(x, y) = (0, 0)$ から $(x, y) = (1, 1)$ まで次の経路 C_1, C_2, C_3 に沿って線積分しなさい.

   (a) C_1: 放物線 $y = x^2$.

   (b) C_2: 直線 $y = x$.

   (c) C_3: 次の経路に沿う直線: $(0, 0) \to (1, 0) \to (1, 1)$.

   模範解答:（a） 被積分関数における y は x^2 に置き換えられ, また $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$ と変数変換することにより

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}_1} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}_1} (3x^2 - 6y)\,\mathrm{d}x + (3x + 2y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (3x^2 - 6x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 2x(3x + 2x^2)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(4x^3 + 3x^2\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x^4 + x^3\right]_0^1 = 2.\end{aligned}$$

   （b） 被積分関数における y は x に置き換えられ, また $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ と変数変換することにより

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}_2} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}_2} (3x^2 - 6y)\,\mathrm{d}x + (3x + 2y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (3x^2 - 6x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (3x + 2x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(3x^2 - x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   （c） $(0, 0) \to (1, 0)$ を経路 $\hat{\mathrm{C}}_3$, $(1, 0) \to (1, 1)$ を経路 $\tilde{\mathrm{C}}_3$ とする. 経路 $\hat{\mathrm{C}}_3$ では被積分関数における y は 0 に置き換えられ, また $\mathrm{d}y = 0$, 経路 $\tilde{\mathrm{C}}_3$ では被積分関数における x は 1 に置き換えられ, また $\mathrm{d}x = 0$ であることから

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}_3} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}_3} (3x^2 - 6y)\,\mathrm{d}x + (3x + 2y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (3 + 2y)\mathrm{d}y \\ &= \left[x^3\right]_0^1 + \left[3y + y^2\right]_0^1 = 5.\end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{A} = (2xy+1)\boldsymbol{i} + (x^2+2y)\boldsymbol{j}$ を $(x, y) = (0, 0)$ から $(x, y) = (1, 1)$ まで, 前節問と同じ経路 C_1, C_2, C_3 にそれぞれに沿って線積分しなさい.[*4]

9.3　偏微分

9.2.2 節の線積分の例で, 関数によってはその線積分は経路の始点と終点にのみ依存して経路の詳細に依存しないことを見た. どのような関数の線積分が経路によらない値をとるのか, を議論するために, さらに以下の数節でいくつかの数学的な概念を導入する.

前章までで扱ってきた微分は, 1 変数関数の微分であった. 空間 x, y, z やさらに時間 t にも依存する多変数関数の微分, 偏微分, をここで導入する.

いま簡単化のため, x, y を独立変数とする 2 変数のスカラー関数 $f(x, y)$ を考える. 以下の議論では関数はさらに z にも依存する 3 変数関数でもよいし, 時間 t にも依存する 4 変数関数でもよい. また多変数に依存するベクトル関数であっても成り立つ. とりあえず今は, 2 変数のスカラー関数で説明しておく. f の x に関する偏微分 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ とは以下の様に定義される:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \tag{9.6}$$

つまり, y はあたかも定数と考えて f を x に関して微分をするのである. 左辺で添え字の y は一定とおく変数を表している. 一定とおく変数が自明な場合には, 添え字は省略される場合がある. $\frac{\partial f}{\partial x}$ はデル エフ デル エックスと読む. 全く同様にして, f の y に関する偏微分は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \equiv \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \tag{9.7}$$

である. 2 変数以上の多変数関数や関数がベクトルであるときも同様に偏微分が定義できる.[*5]

[*4] どの経路でも答えは 3 になる.

[*5] 3 変数関数 $f(x, y, z)$ の z に関する偏微分 $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}$ の定義は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \equiv \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} \tag{9.8}$$

である. さらに, ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の x に関する偏微分 $\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\right)_{y,z}$ は

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\right)_{y,z} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(x+\Delta x, y, z) - \boldsymbol{A}(x, y, z)}{\Delta x} \tag{9.9}$$

と定義される.

1 変数関数 $g(x)$ の微分 $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ は, その関数のグラフの傾きであった. $\frac{\partial f}{\partial x}$ は y のある値に沿って, f の断面を取った時にできるグラフの (x 軸方向の) 傾きである. $\frac{\partial f}{\partial y}$ は x のある値に沿って, f の断面を取った時にできるグラフの（y 軸方向の）傾きである.

9.4　全微分

ある点 (x, y) における 2 変数関数 $f(x, y)$ の値と, その近傍の点 $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$ における f の値との差 $f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y)$ を f の全微分といい, $\mathrm{d}f$ と書く. 即ち,

$$\mathrm{d}f \equiv f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y). \tag{9.10}$$

$\mathrm{d}f$ は偏微分を用いて

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{9.11}$$

と書かれる. これは 1 変数関数 $g(x)$ における $\mathrm{d}g = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ に対応するものである. 全く同様に 3 変数以上の関数にも全微分を導入できる.*6

9.5　勾配演算子

多変数のスカラー関数から多変数のベクトル関数を生成する演算子として勾配演算子もしくはナブラ, 記号で $\boldsymbol{\nabla}$ と書かれる, と呼ばれるものがある. ナブラの定義は 2 次元のデカルト座標系のときには

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} \tag{9.13}$$

である. 3 次元への拡張は容易であろう.*7 $f(x, y)$ に $\boldsymbol{\nabla}$ を作用させたもの

$$\boldsymbol{\nabla} f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{j} \tag{9.15}$$

は $\mathrm{grad}f$ とも書かれ, f の勾配と呼ばれ, それは (9.15) からわかるように $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ x, y 成分とするベクトルである.

*6　$f(x, y, z)$ の全微分は

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{9.12}$$

である.

*7 3 次元のデカルト座標系の勾配演算子は

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{9.14}$$

である.

■注意 $\boldsymbol{\nabla}$ はあたかもベクトルのように扱われる．そこで ∇ ではなく, $\boldsymbol{\nabla}$ とかかれる．またベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ などという演算も定義できる．しかしながら, $\boldsymbol{\nabla}$ が作用する関数と $\boldsymbol{\nabla}$ の順番には注意が必要で $\boldsymbol{\nabla}f \neq f\boldsymbol{\nabla}$ であるし, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ である．f の勾配を表すのは $\boldsymbol{\nabla}f$ であり $f\boldsymbol{\nabla}$ ではない．$\boldsymbol{\nabla}$ を含む演算は掛け算に関しては可換ではないのである．

$\boldsymbol{\nabla}f$ はベクトルなので, その方向や大きさはどのようなものであろうか．先ず方向について考える．f を地図上の (x,y) における標高と考えるとイメージがしやすいであろう．等高線は f の値が等しいところを連ねた線である．ある等高線上のある点 P と同じ等高線上の点 P の近傍の点 Q を考える．P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ とすると, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は点 P における等高線の接線方向を向くベクトルである．点 P における $\boldsymbol{\nabla}f$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ の内積を計算すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{j}\right)\cdot(\mathrm{d}x\,\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\,\boldsymbol{j}) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}f.
\end{aligned} \tag{9.16}$$

つまり, P と Q との間の f の全微分になる．しかしながら, P と Q は同じ等高線上の点であるので $\mathrm{d}f=0$ となる．したがって, $\boldsymbol{\nabla}f$ は $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ と垂直, 即ち等高線の接線と垂直な方向を向く．$\boldsymbol{\nabla}f$ の正の方向は f が大きくなる方向である．さらに, 等高線の間隔が狭いところほど大きくなる．

具体例: $f=x^2y+x+y^2$ の勾配は, $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+1$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+2y$ なので, $\boldsymbol{\nabla}f=(2xy+1)\boldsymbol{i}+(x^2+2y)\boldsymbol{j}$ となる．これは 9.2.2 節の例 2 の場合の被積分関数に等しい．即ち, 9.2.2 節の例 2 の場合の被積分関数は, $f=x^2y+x+y^2$ の勾配によって導かれる．

9.6 線積分再訪

以上の知識を使って, 再び線積分を考えよう．位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$（デカルト座標系の成分で (x_1,y_1,z_1)）で表される点 P からある経路 C に沿って位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$（デカルト座標系の成分で (x_2,y_2,z_2)）で表される点 Q まで, あるベクトル $\boldsymbol{A}$ を線積分する．このとき, $\boldsymbol{A}$ があるスカラー関数 f の勾配から導かれる, 即ち, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}f$ のとき,

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{\nabla}f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= \int_{\mathrm{C}} \mathrm{d}f = f(x_2,y_2,z_2)-f(x_1,y_1,z_1)
\end{aligned} \tag{9.17}$$

となり, 線積分の結果は経路の始点 $\boldsymbol{r}_1$ と終点 $\boldsymbol{r}_2$ のみに依存することになる．実際に, 9.2.2 節の例 2 の場合を再度扱ってみる．被積分関数 $\boldsymbol{A} = (2xy+1)\boldsymbol{i} + (x^2+2y)\boldsymbol{j}$ はスカラー関数 $f = x^2y + x + y^2$ の勾配で与えられることは前節の例で見た．そこで, このベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ を $(x, y) = (0, 0)$ から $(x, y) = (1, 1)$ まで, ある経路 C に沿って線積分してみると,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}} (2xy+1)\mathrm{d}x + (x^2+2y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{\nabla}(x^2y + x + y^2)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_{\mathrm{C}} \mathrm{d}(x^2y + x + y^2) \\ &= \left[x^2y + x + y^2\right]_{(0,0)}^{(1,1)} = 3. \end{aligned} \tag{9.18}$$

つまり, 経路に依存せず線積分は始点と終点における f の値で決まり, 3 となる．これは以前の計算と無矛盾である．

演習問題[*8]

1. $\boldsymbol{A} = (2xy+1)\boldsymbol{i} + (x^2+2y)\boldsymbol{j}$ を $(x,y)=(0,0)$ から $(x,y)=(1,1)$ まで, 以下の経路 C_1, C_2, C_3 にそれぞれに沿って線積分しなさい.[*9]
   (a) C_1: 放物線 $y=x^2$.
   (b) C_2: 直線 $y=x$.
   (c) C_3: 次の経路に沿う直線: $(0,0)\to(1,0)\to(1,1)$.
2. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ のとき, 次の偏微分 (a)〜(c) と勾配 (d) を計算しなさい.
   (a) $\frac{\partial r}{\partial x}$
   (b) $\frac{\partial r}{\partial y}$
   (c) $\frac{\partial r}{\partial z}$
   (d) $\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}$

[*8] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

[*9] どの経路でも答えは 3 になる.

第 10 章

エネルギー保存則

物理学には保存則と呼ばれる重要な法則がある．保存とは時間とともに変化せず一定の値を保ち続ける性質を指し, 保存される量は保存量と呼ばれる．力学における保存則は,（力学的）エネルギー保存則, 運動量保存則, 角運動量保存則がある．これらの保存則は運動方程式から導くことができる．そこで, これらの保存則は運動方程式が持つ情報を超えるものではない．しかしながら, これらの保存則を用いれば, 具体的に運動方程式を立ててそれを解くことなく, どのような運動が可能か, 不可能か, を判断したり, 証明したりすることができる, という点で保存則は有用である．

以下では, 前章で導入した線積分の知識を, 力学の問題に適用することで仕事の概念を導入し, エネルギー保存則を導いていく．

10.1　仕事

物理学では, 物体が力を受けて移動するとき,「力は物体に仕事(work) をした」, という．

10.1.1　定義

時間空間に依存しない力 $\boldsymbol{F}$[*1]が作用している物体が, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される方向と大きさ（距離）だけ動いたとき,

$$W \equiv \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} \tag{10.1}$$

を力が物体にした仕事と定義する．

内積の定義から, 力の働く方向と移動の方向が垂直のときには仕事 W はゼロである．また移動距離がゼロ ($|\boldsymbol{r}| = 0$) であれば, この場合も仕事 W はゼロである．

[*1] 即ち, $\boldsymbol{F}$ は向きも大きさも変わらない一定のベクトル．

(10.1) をより一般の場合に拡張しよう．もし, 力 $\boldsymbol{F}$ が場所の関数である場合, 即ち, 力の向きと大きさが場所に依存して変化する場合（$\boldsymbol{F}(x, y, z)$ である場合）に, 物体が位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ で表される点 P から, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$ で表される点 Q まである経路 C に沿って移動したときに, 力 $\boldsymbol{F}$ がした仕事は,

$$W \equiv \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{10.2}$$

となる．これは, 経路を無限小の長さの区間に分割すると, 各区間では $\boldsymbol{F}$ は一定とみなすことができるので, 各区間に (10.1) を適用し, その和を計算することにより導かれる．(10.2) は力 $\boldsymbol{F}$ がした仕事は力 $\boldsymbol{F}$ の線積分で与えられることを示している．

10.1.2　次元

仕事はどのような次元を持つのかを調べておく．定義 (10.1) もしくは (10.2) より仕事 W の次元は力の次元と長さの次元との積である．力の次元を長さの次元 L, 質量の次元 M, 時間の次元 T で表すと, MLT^{-2} であり, したがって

$$\begin{aligned}[W] &= [力] \times [長さ] \\ &= \mathrm{MLT}^{-2} \times \mathrm{L} \\ &= \mathrm{M}(\mathrm{L}/\mathrm{T})^2 \end{aligned} \tag{10.3}$$

となり, 質量の次元と速度の次元 (LT^{-1}) の 2 乗で表せる．これはあとで導入されるエネルギーと同じ次元である．SI 単位では, 仕事, エネルギーの単位は J (ジュール) と表され,

$$\begin{aligned}\mathrm{J} &= \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \\ &= \mathrm{kg}\,(\mathrm{m/s})^2 \end{aligned} \tag{10.4}$$

である．

10.2　運動方程式の積分

力 $\boldsymbol{F}$ の具体的な形（一様な重力が物体に作用しているとか, バネの復元力が物体に働いているかなど）は指定せずに, 運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \tag{10.5}$$

を線積分してみる．(10.5) を位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ によって指定される点 P から位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$ によって指定される点 Q まである経路 C に沿って線積分する:

$$\int_{\mathrm{C}} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{10.6}$$

前節で述べたように, 右辺は力 $\boldsymbol{F}$ が行う仕事である．左辺は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が時間の関数であること, 即ち, $\boldsymbol{r}(t)$ であること, を考えると, 積分を位置に関する積分から時間に関する積分に変数変換することができる:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t. \tag{10.7}$$

質点が $\boldsymbol{r}_1$ にいる時刻を t_1, $\boldsymbol{r}_2$ にいる時刻を t_2 と表すことにする．このとき (10.6) の左辺は (10.7) を用いて,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{C}} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{t_1}^{t_2} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\boldsymbol{v}^2\right\}\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\mathrm{d}\left\{\boldsymbol{v}^2\right\} \\
&= \left[\frac{1}{2}m\left\{\boldsymbol{v}(t)\right\}^2\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_2) - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_1)
\end{aligned} \tag{10.8}$$

と変形できる．ここで, $\boldsymbol{A}^2$ はあるベクトル量 $\boldsymbol{A}$ とそれ自身の内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2$ である．さらに 1 行目から 2 行目の変形には

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= 2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2},
\end{aligned} \tag{10.9}$$

を用い, 速度を $\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}$ で表した．$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$ は運動している物体が持っているエネルギーで運動エネルギーと呼ばれる．これは運動の激しさを表す指標の一つである．

以上をまとめると, 運動方程式を積分することにより

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_2) - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_1) = \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{10.10}$$

が得られた．上式は, 力 $\boldsymbol{F}$ が質点に仕事をすると, その分だけ質点の運動エネルギーが変化することを意味している．

10.3　エネルギー保存則

前節の議論をさらに進める．力 $\boldsymbol{F}$ があるスカラー関数 $U(x, y, z)$ の勾配を用いて,

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U \tag{10.11}$$

と表されるとき, $\boldsymbol{F}$ を保存力と呼び, U をポテンシャルと呼ぶ.[*2] 被積分関数のベクトルがあるスカラー関数の勾配で書けるとき, ベクトルの線積分は経路の詳細によらず, 始点と終点の値だけで線積分の値が決まることを前章で見た．そこで, 今のような状況で, (10.10) は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_2)-\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_1)&=\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=-\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{\nabla}U\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=-\int_{\mathrm{C}}\mathrm{d}U=U(\boldsymbol{r}_1)-U(\boldsymbol{r}_2)\end{aligned}\tag{10.12}$$

となる．(10.12) における $U(\boldsymbol{r}_1)$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ で与えられる点 P におけるポテンシャルの値を表す．同様に $U(\boldsymbol{r}_2)$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$ で与えられる点 Q におけるポテンシャルの値を表す．(10.12) は移項することにより

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_2)+U(\boldsymbol{r}_2)=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_1)+U(\boldsymbol{r}_1)\tag{10.13}$$

と書き直すことができる．この式の左辺は, 質点が時刻 t_2 において位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}(t_2)$ に存在する場合に, 質点が持つ運動エネルギーとポテンシャルの和であり, 右辺は質点が時刻 t_1 において位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}(t_1)$ に存在する場合に, 質点が持つ運動エネルギーとポテンシャルの和であり, 両者が等しいことを (10.13) は述べている．t_1 と t_2 のとりかたは任意であるので, もし t_1 が運動が開始された時刻, t_2 が運動の途中の任意の時刻と考えると, 運動エネルギーとポテンシャルの和は, 運動のあいだ常に一定の値になっていることを意味している．運動エネルギーとポテンシャルの和は力学的エネルギーと呼ばれ, したがって, (10.13) は力学的エネルギー保存則を表している.

■ポテンシャルに関する注意事項 1　：一般に運動方程式における力 $\boldsymbol{F}$ は時間の関数であってもよいが, (10.12) で定義されるポンテンシャル U は位置のみの関数である．つまり場所を指定すればポテンシャルは時間を指定せずに値が決まる関数である．但し, 質点が運動する場合には質点の位置が時間により変わるので, 質点のポテンシャルは質点の位置を通じて時間に依存する．即ち, $U(x,y,z)=U(x(t),y(t),z(t))$ である．もしくは

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial t}=0\tag{10.14}$$

[*2] ポテンシャルはエネルギーの次元を持っているのでポテンシャルエネルギーとも呼ばれる．ポテンシャルは高校の物理では位置のエネルギーと呼ばれていたものである.

であるが,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U(x,y,z)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\ &= \boldsymbol{\nabla} U \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \boldsymbol{\nabla} U \cdot \boldsymbol{v} \neq 0 \end{aligned} \tag{10.15}$$

である．このような U の t に対する依存性を, U は t に陽に依存しない, もしくは U は t に陰的に依存する, と呼ぶ.

■ポテンシャルに関する注意事項 2　:ポテンシャルには定数分の不定性がある．つまり, (10.12) を満たすポテンシャル U にある定数 U_0 を足したものを, U' とする: $U'(x,y,z) \equiv U(x,y,z) + U_0$．しかし, $\nabla U' = \nabla U$ なので, U' からも U からも同じ保存力 $\boldsymbol{F}$ が導かれる．そこで, ポテンシャルを論じるときにはどこを基準にしたポテンシャルなのかを明示する場合がある.

10.4　具体例

7 章で考察したバネに繋がれたおもりの振動の運動方程式から, この系の力学的エネルギーと力学的エネルギー保存則を導いてみよう．運動方程式 (7.3) を点 P から点 Q まで線積分する．ただしこの問題は空間は 1 次元 ($\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i}$) であったので, 点 P の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i}$, 点 Q の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i}$ である．また質点が P, Q にいる時刻をそれぞれ t_1, t_2 とすると $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}(t_2)$, $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ である.

前節の一般論のやり方に従って運動方程式を線積分する．計算の途中経過を詳細に書い

ておくと,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} m\frac{\mathrm{d}^2(x\,\boldsymbol{i})}{\mathrm{d}t^2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} kx\,\boldsymbol{i}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
&\Rightarrow\quad \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow\quad \int_{t_1}^{t_2} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow\quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\mathrm{d}t = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow\quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\,\mathrm{d}\left\{v_x^2\right\} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow\quad \left[\frac{1}{2}mv_x(t)^2\right]_{t_1}^{t_2} = -\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2}\\
&\Rightarrow\quad \frac{1}{2}mv_x(t_2)^2-\frac{1}{2}mv_x(t_1)^2 = \frac{1}{2}kx(t_1)^2-\frac{1}{2}kx(t_2)^2\\
&\Rightarrow\quad \frac{1}{2}mv_x(t_2)^2+\frac{1}{2}kx(t_2)^2 = \frac{1}{2}mv_x(t_1)^2+\frac{1}{2}kx(t_1)^2. \qquad (10.16)
\end{aligned}
$$

ここで, 5 番目の式以降速度の x 方向成分を $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x$ とした．以上から, この系の力学的エネルギー E は

$$E \equiv \frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}kx^2 \qquad (10.17)$$

であり, (10.16) が力学的エネルギー保存則を表している．(10.17) の第 1 項が運動エネルギーで第 2 項がポテンシャルである．なお, ポテンシャルはバネの自然長を基準 ($x=0$ のとき, $U=0$) としている．

7.8 節では, 運動方程式の初期条件を満足する解を用いて (10.17) が時間に依存しない定数である, エネルギー保存則, を導いた．この節での議論は, 初期条件を使用せず, 運動方程式の解も用いないで, 運動方程式から直接, エネルギー保存則を導いた．これが本節と 7.8 節との違いであり, この節の議論がより一般的な議論であることを注意しておく．

10.5　エネルギー保存則の別の導出方法

10.3 節では運動方程式を線積分することによって, エネルギー保存則を導いた．本節では別の方法で議論してみる．ここで紹介する方法が, エネルギー保存則やエネルギーの時間発展方程式を導出する際の標準的な方法である．

10.5.1　一般論

10.3 節と同様に, 力がポテンシャル U から導かれる場合の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\boldsymbol{\nabla}U \tag{10.18}$$

を議論の出発点とする. (10.18) の両辺と速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ との内積を計算する:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\nabla}U\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{10.19}$$

(10.19) の左辺は (10.9) より, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}$ に等しい. 一方, (10.19) の右辺は, (10.15) より, $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ に等しい. 以上より, (10.19) は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}. \tag{10.20}$$

もしくは,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U\right) = 0. \tag{10.21}$$

と書き直せる. つまり, 運動エネルギー $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$ とポテンシャル U の和である力学的エネルギー $E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U$ は時間に依存しない: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$.

10.5.2　具体例 1

6.3 節で扱った自由落下問題のエネルギーおよびエネルギー保存則を議論してみる. 一様な重力場中を運動する質点が従う運動を方程式を考える:

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} = -mg\boldsymbol{j}. \tag{10.22}$$

ここで, 鉛直方向をデカルト座標系の y 軸, 重力の向きと逆向きを y 軸の正の方向とした. $\boldsymbol{j}$ はデカルト座標系の y 方向の単位ベクトルである. 運動は鉛直方向のみとする. このとき (10.22) の両辺と速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ との内積を計算する:

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -mg\boldsymbol{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{10.23}$$

(10.23) の左辺は,

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_y^2\right) \end{aligned}$$

となる．ここで速度の鉛直方向成分を v_y とした．一方, (10.23) の右辺は,

$$
\begin{aligned}
-mg\boldsymbol{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= -mg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-mgy\right)
\end{aligned}
$$

に等しい．以上より, (10.23) は

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}mv_y^2 + mgy\right\} = 0 \tag{10.24}
$$

と変形できる．つまり, 一様な重力場中の鉛直 1 次元運動では, 運動エネルギー $\frac{1}{2}mv_y^2$ とポテンシャル mgy の和である全エネルギー $E = \frac{1}{2}mv_y^2 + mgy$ は時間に依存しない: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$. ここで, ポテンシャルは $y = 0$ を基準とした.

10.5.3　具体例 2

10.4 節で考察したバネに繋がれた物体の運動を再び考える．運動方程式

$$
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} = -kx\boldsymbol{i} \tag{10.25}
$$

の両辺と速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ との内積を計算する:

$$
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -kx\boldsymbol{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{10.26}
$$

(10.26) の左辺は,

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right)
\end{aligned}
$$

となる．ここで速度の x 方向成分を v_x とした．一方, (10.26) の右辺は,

$$
\begin{aligned}
-kx\boldsymbol{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= -kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)
\end{aligned}
$$

に等しい．以上より, (10.23) は

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2\right\} = 0 \tag{10.27}
$$

と変形できる．こうして再び力学的エネルギー (10.17) の保存則が得られる.