演習問題解答例 (1)

岩山隆寛 [*]

演習問題[*1]

1. 三角関数の公式:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{1}$$

をピタゴラスの定理と三角関数の定義から導きなさい.

解答例: 図 1 で示されている直角三角形に対して, 底辺 (AB 間) の長さ a と高さ (BC 間) b を, 斜辺 (AC 間) の長さ c および 斜辺と底辺との間の角度 θ を用いて表すと, $a = c\cos\theta$, $b = c\sin\theta$ である. これらをピタゴラスの定理 $a^2 + b^2 = c^2$ に代入すると,

$$c^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta = c^2 \tag{2}$$

となり, 両辺を c^2 で割ると, 求めたい式 (1) が得られる.

2. t に関する 2 次関数 $f(t) = at^2 + bt + c$ の微分に関して以下の問いに答えなさい. ここで, a, b, c はある定数とする.

(a) f を t に関して微分しなさい. つまり, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ を求めなさい. 解答の際には表記法に注意しましょう. 高校までの表記法ではなく, 講義で使用した表記法を使いましょう. [*2]

解答例:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(at^2 + bt + c)\\ &= 2at + b.\end{aligned}$$

---

* 福岡大学理学部地球圏科学科. iwayama@fukuka-u.ac.jp

*1 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

*2 f' と書かないように！

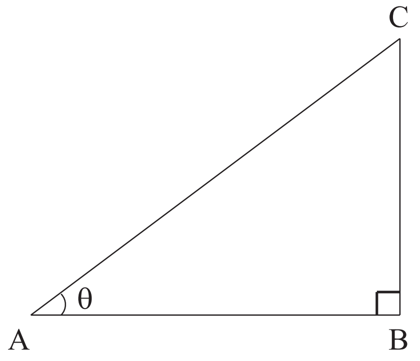

図 1　直角三角形 ABC. 底辺の長さ $\mathrm{AB} = a$, 高さ $\mathrm{BC} = b$, 斜辺の長さ $\mathrm{AC} = c$ とする.

(b) 上で得られた答えをさらに t に関して微分しなさい. つまり, $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ を求めなさい. [*3]

解答例:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(at^2 + bt + c) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(at^2 + bt + c)\right\} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2at + b) \\
&= 2a.
\end{aligned}
$$

3. 合成関数の微分を用いて, 次の問いに答えなさい.

(a) α を定数, x を実数の変数として, 指数関数 $f(x) = e^{\alpha x}$ を x に関して微分しなさい. [ヒント：$y = \alpha x$ と考える.]

---

*3 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ を t に関して微分するとき, 表記法としては,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$$

や

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$$

と書く. これらは, f の t に関する 2 階微分, という.

解答例：　独立変数を $y = \alpha x$ とすると, 合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}e^y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}e^y}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ &= (e^y) \times (\alpha) = \alpha e^{\alpha x}. \end{aligned} \tag{3}$$

（b）α を定数, x を実数の変数として, 指数関数 $f(x) = e^{\alpha x^2}$ を x に関して微分しなさい. [ヒント：$y = \alpha x^2$ と考える.]

解答例：　独立変数を $y = \alpha x^2$ とすると, 合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}e^y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}e^y}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ &= (e^y) \times (2\alpha x) = 2\alpha x e^{\alpha x^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

（c）α を定数, x を実数の変数として, 正弦関数 $f(x) = \sin(\alpha x)$ と余弦関数 $g(x) = \cos(\alpha x)$ を x に関して微分しなさい.

解答例：　独立変数を $y = \alpha x$ とすると, 合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}\sin y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sin y}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ &= (\cos y) \times (\alpha) = \alpha \cos(\alpha x). \end{aligned} \tag{5}$$

同様に,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}\cos y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\cos y}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ &= (-\sin y) \times (\alpha) = -\alpha \sin(\alpha x). \end{aligned} \tag{6}$$

4. 積関数と冪関数の微分の公式を使用して,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}f - g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}{f^2}$$

となることを示しなさい.

解答例：　微分される関数を $\frac{g}{f} = gf^{-1}$ と考える. このとき, 積関数と冪関数の微

分の公式を使用して,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(gf^{-1}) &= \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}f^{-1} + g\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}f^{-1} + g\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}f^{-1} - gf^{-2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}f - g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}{f^2}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

ここで, 1 行目から 2 行目への変形には, 合成関数の微分の公式を用いた.

今回の数学のポイント

冪関数の微分, 指数関数の微分, 積関数の微分, 合成関数の微分 は覚えておきましょう.（おそらく高校生の時に習ったと思います.） 今後よく使います. 使っているうちに覚えてしまうかもしれませんが.