力学 I / 力学 A
2019 年度講義ノート

岩山 隆寛*1

福岡大学理学部地球圏科学科

*1 e-mail: iwayama@fukuoka-u.ac.jp

目次

ガイダンス

この講義ノートは, 福岡大学理学部地球圏科学科の「力学 I」, および同大学工学部機械工学科の「力学 A」の講義ノートである. 両方の授業は名称は異なるが共に 1 年生前期に開講されていて, 同じ書籍[*1]を教科書として使用する授業である. この授業やノートで扱うテーマは, 上記の教科書に沿いながら, いくつかの事柄について補足を加えている.

力学を学ぶ意義

自然科学には大きく分けて四つの分野, 物理学, 化学, 生物学, 地学（最近は地球惑星科学とも呼ばれる) がある. この中で物理学は, 最も早く体系化[*2]され, その体系は他の自然科学分野の発展に大きく影響を及ぼした. さらにそれは他の自然科学分野や工学の基礎にもなっている. これらの点から**物理学は自然科学の中で最も基礎的かつ包括的で, 重要な学問分野**である.

物理学は, 考察する対象によっていくつかの分野に分かれている. 物体の運動を扱う「力学」, 熱現象を扱う「熱力学」, 電気・磁気現象を扱う「電磁気学」, 原子などの微視的な世界の現象を扱う「量子力学」, 原子や分子などが非常に多数存在して集団を構成しているとき, その集団の性質を扱う「統計力学」, は物理学の基礎的な分野である. 力学は物理学の分野の中で最も早く体系化された. さらにその体系は, 力学の後に発展した物理学の諸分野の体系化に大きな影響を及ぼした. そこで力学は物理学の骨格であるともいえる. このような理由から大学の理系学部初年次にはほとんど必ず力学の授業が開講されている. そして, 力学をしっかり修めておくことが大学後年時の勉強や卒業研究にとって重要である.

[*1] 小出昭一郎: 物理学（三訂版）, 裳華房, 1997.

[*2] 知識や方法, 法則などを系統立てて整えること, また, まとめあげること.

物理学や力学の論理体系

一般に論理的に結論を導く方法には 2 つの方法, 帰納と演繹, がある.[*3]

帰納とは

帰納とは, 具体的な事例を観察したり集めたりし, そこにある共通点を探したり法則性を見出すことを通じてより一般的な結論を導く方法である.

物理学においては, 実験や観測によって一般的に成り立つ法則を見つけることが帰納的方法である. それらの法則の中で最も基礎的な法則を数式で表現したものは**基礎方程式**と呼ばれる. 基礎方程式が発見されれば, その分野は完成された, といっても過言ではない. 力学, 熱力学, 電磁気学, 量子力学ではそれらの基礎方程式が既に知られている.[*4]

演繹とは

演繹とは, 出発点としてある前提を認めたら, そこから必然の展開として結論を導く方法である.

物理学における出発点としての前提は, **基礎方程式**である. 考察する状況に応じて基礎方程式を立て, それを数学的に解くことにより, 考察したい現象の性質や未来が予測できる. このことから数学は物理学にとっては「ことば」であり密接な関係がある.

本講義の進め方

本講義は演繹的に議論を進めていくことにする. 力学では基礎的法則や基礎方程式は既に知られている. 基礎的な法則は **Newton の運動の法則**, であり, 基礎方程式は **Newton の運動方程式**である. 本講義ではまず先に**基礎方程式を提示**し, **それを理解するための概念を説明**する. 次に**基礎方程式の応用**として, いくつかの具体的な問題を扱う. さらに**基礎方程式から導かれる概念**も解説する.

指定の教科書の各節に従い, 本講義では次の話題を扱う予定である.[*5]

1. 質点
2. ベクトル

[*3] 帰納と演繹の説明には, 滝浦真人, 日本語リテラシー, 2016 年, 放送大学教育振興会　の記述を採用した.

[*4] なお, 電磁気学は既に体系化された学問であるが, 後年次に開講される電磁気学の講義ではしばしば帰納的に議論が展開される.

[*5] 授業回数や 1 階の授業時間の制約から, 話題を整理・統合する場合がある.

3. 変位と速度
4. 加速度
5. 力と慣性
6. 放物運動
7. 単振動
8. 単振り子
9. 仕事とエネルギー
10. 束縛運動
11. 保存力とポテンシャル
12. 位置のエネルギー
13. 平面運動の極座標表示
14. 万有引力と惑星の運動
15. ガリレイ変換と回転座標系

1–4, 15 は基礎方程式を理解するために必要な概念の説明である．5 で力学の基礎的法則, 基礎方程式が語られる．6–8, 10 は運動方程式の応用で, 具体的な問題を解いてみる．これらの問題は高等学校の「物理基礎」で扱われた問題である．高等学校のときと議論の仕方問題の解き方が大きく異なることを実感して欲しい．9, 11, 12, 14 は運動方程式から導かれる性質や概念の解説である．高校の「物理基礎」では天下り的に提示された公式が, 基礎方程式から数学的に導かれることを理解して欲しい．

Newton の運動の法則

Sir Isaac Newton は三つの法則を力学の公理[*6]と考えた．その中でも最も重要なものが Newton の第 2 法則で, それを数学的に書き下したものが力学における基礎方程式, **運動方程式**, である:

Newton の第 2 法則

物体に力 $\boldsymbol{F}$ が働くと速度が変化し（このことは加速度が生じることと等価である）, 物体の加速度は力に比例する:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}. \tag{1}$$

ここで, m は物体の質量, $\boldsymbol{a}$ は加速度である.

[*6] 証明不可能であるが実験や観測から正しいことが示されている根本命題のことを指す.

なお, 物体の加速度 $\boldsymbol{a}$ は速度 $\boldsymbol{v}$ の変化率, $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$, なので, (1) は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \tag{2}$$

とも書かれる. ここで, t は時間である. さらに, 速度 $\boldsymbol{v}$ は位置 $\boldsymbol{r}$ の変化率 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, なので (2) は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F} \tag{3}$$

とも書かれる. (1)–(3) は運動方程式と呼ばれる.

表記法

物理学では数式を用いて議論を展開する. 数式は数字, 記号で構成されるので, 数式を構成する文字の書き方はとても重要である. (2), (3) において, 例えば力を表す記号 $\boldsymbol{F}$ には F とは異なる文字種, 太文字, を使用していることに注意しよう. 太文字で表された記号はベクトル量を表す. $\boldsymbol{r}$ と r の違い, $\boldsymbol{v}$ と v, $\boldsymbol{a}$ と a を区別して欲しい. アルファベッドの他に, ギリシャ文字もよく用いられるのでそのような文字の使用に慣れてほしい. よく使用されるギリシャ文字は α (アルファ), β (ベータ), γ (ガンマ), δ(デルタ), Δ(デルタ), ϵ(イプシロン), π(パイ), θ(シータ), λ(ラムダ) などである.

数学との関係

力学の問題は, 力 $\boldsymbol{F}$ が与えられたときに, 物体が任意の時刻 t においてどのような速度 $\boldsymbol{v}$ で運動するか, さらには任意の時刻にどこの場所 $\boldsymbol{r}$ に存在するか, を求めることである. つまり $\boldsymbol{F}$ が既知の量であり, (2), (3) の微分方程式[*7]を解いて, $\boldsymbol{v}$ を t の関数で表現したり, 物体の位置 $\boldsymbol{r}$ を時間 t の関数として求めたりすることである. このことから, ベクトル, および微分積分の数学的知識を必要とする. 講義では数学的知識については必要になったときにその都度解説したり, 毎回の授業で少しずつ概念や便利な計算法を解説したり, 演習問題を解いて計算力を鍛えていくことにする.

高校までに習った数学の復習

- ピタゴラスの定理: 図 1 で示されているように, 底辺 (AB 間) の長さが a, 高さ (BC 間) が b の直角三角形の斜辺 (AC 間) の長さ c は

$$c^2=a^2+b^2 \tag{4}$$

[*7] 微分を含んだ方程式のこと.

である.

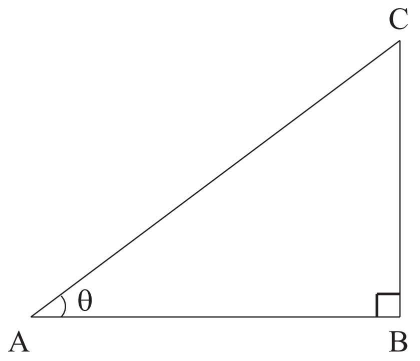

図 1　直角三角形 ABC.

- 三角関数: 図 1 で示されている三角形 ABC において, 辺 AC と辺 AB の間の角度を θ とする. このとき,

$$\sin\theta = \frac{b}{c}, \tag{5}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{c}, \tag{6}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}, \tag{7}$$

である.

- 三角関数の公式:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{8}$$

この公式は有名な公式なので覚えている人も多いと思う. 覚えておくと計算が早まるので便利であるが, 上のピタゴラスの定理と三角関数の定義から自然に導かれる.

- 冪関数の微分: n をある定数, x を実数の変数として, 冪関数 $f(x) = x^n$ を x に関して微分すると,

冪関数の微分

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1} \tag{9}$$

である. ここで, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ は一つの記号を表し, この記号の左側に来る関数を x に関して微分する, という記号である. 高校の数学では $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ は $f(x)'$ と書いていたものである. $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ も $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ も「$f(x)$ を x に関して微分する」, 意味である. 大学以上

の数学では, どの変数で微分するか, ということを明示的に表すために, このような表記になっている. このベクトルを太文字で書いたり, ギリシャ文字の使用の他に, 微分のこのような表記にも慣れていってほしい. $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ はしばしば, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ とも書く.

- 指数関数の微分: x を実数の変数として, 指数関数 $f(x) = e^x$ を x に関して微分すると,

指数関数の微分

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x \tag{10}$$

である.

- 三角関数の微分: x を実数の変数として, 正弦関数 $f(x) = \sin x$ と余弦関数 $g(x) = \cos x$ を x に関して微分すると,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x, \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x \tag{12}$$

である.

- 合成関数の微分: x, y を実数とし, f は y の関数 $f(y)$ であり, さらに y は x の関数 $y(x)$ であるとする. このような関数を合成関数という. このとき, f を x に関して微分すると

合成関数の微分

$$\frac{\mathrm{d}f(y(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \tag{13}$$

である.

- 積関数の微分: x を実数とし, x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積を微分すると

積関数の微分 (微分の連鎖律)

$$\frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \tag{14}$$

である. これは微分の連鎖律 (chain rule) とも呼ばれる.

演習問題[*8]

レポートを提出する際の注意

他人の回答を盲目的に写すことは絶対にしてはいけません．例年, 誤った解答を写して提出する人が極めて多いです．誤った解答を写すことは何の勉強にもなりません．他人の解答を参考にする場合には, 批判的によく確認して, 納得・理解のうえで自分の解答を作成しましょう．模範解答を用意します．模範解答を参考にする場合にも, 批判的によく確認して, 納得・理解のうえで自分の解答を作成しましょう．（誤植などがある場合がありますので.）

1. 三角関数の公式:
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
をピタゴラスの定理と三角関数の定義から導きなさい.
2. t に関する 2 次関数 $f(t) = at^2 + bt + c$ の微分に関して以下の問いに答えなさい. ここで, a, b, c はある定数とする.
   (a) f を t に関して微分しなさい．つまり, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ を求めなさい．解答の際には表記法に注意しましょう．高校までの表記法ではなく, 講義で使用した表記法を使いましょう．[*9]
   (b) 上で得られた答えをさらに t に関して微分しなさい．つまり, $\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}$ を求めなさい．[*10]
3. 合成関数の微分を用いて, 次の問いに答えなさい.
   (a) α を定数, x を実数の変数として, 指数関数 $f(x) = e^{\alpha x}$ を x に関して微分しなさい．[ヒント：$y = \alpha x$ と考える.]

[*8] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください．提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

[*9] f' と書かないように！

[*10] $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ を t に関して微分するとき, 表記法としては,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$$
や
$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}$$
と書く．これらは, f の t による 2 階微分, という.

(b) α を定数, x を実数の変数として, 指数関数 $f(x) = e^{\alpha x^2}$ を x に関して微分しなさい. [ヒント：$y = \alpha x^2$ と考える.]

(c) α を定数, x を実数の変数として, 正弦関数 $f(x) = \sin(\alpha x)$ と余弦関数 $g(x) = \cos(\alpha x)$ を x に関して微分しなさい.

4. 積関数と冪関数の微分の公式を使用して,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}f - g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}{f^2}$$

となることを示しなさい.