第 9 章

エネルギー保存則

物理学には**保存則**と呼ばれる重要な法則がある．**保存**とは時間とともに変化せず一定の値を保ち続ける性質を指し, 保存される量は**保存量**と呼ばれる．力学における保存則は,（力学的）エネルギー保存則, 運動量保存則, 角運動量保存則がある．これらの保存則は運動方程式から導くことができる．そこで, これらの保存則は運動方程式が持つ情報を超えるものではない．しかしながら, これらの保存則を用いれば, 具体的に運動方程式を立ててそれを解くことなく, どのような運動が可能か, 不可能か, を判断したり, 証明したりすることができる, という点で有用である．

以下では, 前章で導入した線積分の知識を, 力学の問題に適用することで仕事の概念を導入し, エネルギー保存則を導く．

9.1　仕事

物理学では, 物体が力を受けて移動するとき,「力は物体に**仕事** (work) をした」, という．

9.1.1　定義

時間空間に依存しない力 $\boldsymbol{F}$[*1]が作用している物体が, 距離 $\boldsymbol{r}$ だけ動いたとき,

$$W \equiv \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} \tag{9.1}$$

を力が物体にした仕事と定義する．

内積の定義から, 力の働く方向と移動距離が垂直のときには力による仕事はゼロである．また移動距離がゼロ ($|\boldsymbol{r}| = 0$) であれば, この場合も力による仕事はゼロである．

[*1] 即ち, $\boldsymbol{F}$ は向きも大きさも変わらない一定のベクトル．

(9.1) をより一般の場合に拡張しよう．もし，力 $\boldsymbol{F}$ が場所の関数である場合，即ち，$\boldsymbol{F}(x,y,z)$ である場合に，物体が位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ で表される点 P から，位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$ で表される点 Q まである経路 C に沿って移動したときに，力 $\boldsymbol{F}$ がした仕事は，

$$W \equiv \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{9.2}$$

となる．これは，経路を無限小の長さの区間に分割すると，各区間では $\boldsymbol{F}$ は一定とみなすことができるので，各区間に (9.1) を適用し，その和を計算することにより導かれる．(9.2) は力 $\boldsymbol{F}$ がした仕事は力 $\boldsymbol{F}$ の線積分で与えられることを示している．

9.1.2　次元

仕事はどのような次元を持つのかを調べておく．定義 (9.1) もしくは (9.2) より仕事 W の次元は力の次元と長さの次元との積である．力の次元を長さの次元 L，質量の次元 M，時間の次元 T で表すと，

$$\begin{aligned}[W] &= [\text{力}] \times [\text{長さ}] \\ &= \mathrm{MLT}^{-2} \times \mathrm{L} \\ &= \mathrm{M}(\mathrm{L}/\mathrm{T})^2 \end{aligned} \tag{9.3}$$

となり，質量と速度の 2 乗で表せる．これはあとで導入されるエネルギーと同じ次元である．SI 単位では，仕事，エネルギーの単位は J (ジュール) と表され，

$$\begin{aligned}\mathrm{J} &= \mathrm{N}\cdot \mathrm{m} \\ &= \mathrm{kg}\,(\mathrm{m/s})^2 \end{aligned} \tag{9.4}$$

である．

9.2　運動方程式の積分

力 $\boldsymbol{F}$ の具体的な形は指定せずに，運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \tag{9.5}$$

の積分を行ってみる．(9.5) を位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ によって指定される点 P から位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$ によって指定される点 Q まである経路 C に沿って線積分する:

$$\int_{\mathrm{C}} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{9.6}$$

前節で述べたように, 右辺は力 $\boldsymbol{F}$ が行う仕事である. 左辺は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が時間の関数であること, 即ち, $\boldsymbol{r}(t)$ であること, を考えると, 積分を位置に関する積分から時間に関する積分に変数変換することができる:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t. \tag{9.7}$$

質点が $\boldsymbol{r}_1$ にいる時刻を t_1, $\boldsymbol{r}_2$ にいる時刻を t_2 と表すことにする. このとき (9.6) の左辺は (9.7) を用いて,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{t_1}^{t_2} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\mathrm{d}t\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\boldsymbol{v}^2\right\}\mathrm{d}t\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}m\mathrm{d}\left\{\boldsymbol{v}^2\right\}\\ &= \left[\frac{1}{2}m\left\{\boldsymbol{v}(t)\right\}^2\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_2) - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_1)\end{aligned} \tag{9.8}$$

と変形できる. ここで速度を $\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}$ で表し,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}, \tag{9.9}$$

を用いた. $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$ は運動している物体が持っているエネルギーで**運動エネルギー**と呼ばれる. これは運動の激しさを表す指標の一つである.

以上をまとめると, 運動方程式を積分することにより

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_2) - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_1) = \int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{9.10}$$

が得られた. 上式は, 力 $\boldsymbol{F}$ が質点に仕事をすると, その分だけ質点の運動エネルギーが変化することを意味している.

9.3　エネルギー保存則

前節の議論をさらに進める. 力 $\boldsymbol{F}$ があるスカラー関数 $U(x,y,z)$ の勾配を用いて,

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U \tag{9.11}$$

と表されるとき, $\boldsymbol{F}$ を**保存力**と呼び, U を**ポテンシャル**と呼ぶ.[*2] 被積分関数のベクトルがあるスカラー関数の勾配で書けるとき, ベクトルの線積分は経路の詳細によらず, 始点と終点の値だけで線積分の値が決まることを前章で見た. そこで, 今のような状況で, (9.10) は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_2)-\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_1)&=\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=-\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{\nabla}U\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=-\int_{\mathrm{C}}\mathrm{d}U=U(\boldsymbol{r}_1)-U(\boldsymbol{r}_2)\end{aligned}\tag{9.12}$$

となる. (9.12) における $U(\boldsymbol{r}_1)$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ で与えられる点 P におけるポテンシャルの値を表す. 同様に $U(\boldsymbol{r}_2)$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$ で与えられる点 Q におけるポテンシャルの値を表す. (9.12) は移項することにより

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_2)+U(\boldsymbol{r}_2)=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_1)+U(\boldsymbol{r}_1)\tag{9.13}$$

と書き直すことができる. この式の左辺は, 質点が時刻 t_2 において位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}(t_2)$ に存在する場合に, 質点が持つ運動エネルギーとポテンシャルの和であり, 右辺は質点が時刻 t_1 において位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}(t_1)$ に存在する場合に, 質点が持つ運動エネルギーとポテンシャルの和であり, 両者が等しいことを述べている. t_1 と t_2 のとりかたは任意であるので, もし t_1 が運動が開始された時刻, t_2 が運動の途中の任意の時刻と考えると, 運動エネルギーとポテンシャルの和は, 運動の間つねに一定の値になっていることを意味している. 運動エネルギーとポテンシャルの和は**力学的エネルギー**と呼ばれ, したがって, (9.13) は**力学的エネルギー保存則**を表している.

■ポテンシャルに関する注意事項　：一般に運動方程式における力 $\boldsymbol{F}$ は時間の関数であってもよいが, (9.12) で定義されるポンテンシャル U は位置のみの関数である. つまり場所を指定すればポテンシャルは時間を指定せずに値が決まる関数である. 但し, 質点が運動する場合には質点の位置が時間により変わるので, 質点のポテンシャルは質点の位置を通じて時間に依存する. 即ち, $U(x,y,z)=U(x(t),y(t),z(t))$ である. もしくは

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial t}=0\tag{9.14}$$

[*2] ポテンシャルはエネルギーの次元を持っているのでポテンシャルエネルギーとも呼ばれる. ポテンシャルは高校の物理では位置のエネルギーと呼ばれていたものである.

であるが,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U(x,y,z)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\
&= \boldsymbol{\nabla} U \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \boldsymbol{\nabla} U \cdot \boldsymbol{v} \neq 0 \qquad (9.15)
\end{aligned}
$$

である．このような U の t に対する依存性を, U は t に陽に依存しない, もしくは U は t に陰的に依存する, と呼ぶ.

9.4　具体例

6 章で考察したバネに繋がれたおもりの振動の運動方程式から, この系の力学的エネルギーと力学的エネルギー保存則を導いてみよう．運動方程式 (6.3) を点 P から点 Q まで線積分する．ただしこの問題は空間は 1 次元 ($\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i}$) であったので, 点 P の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i}$, 点 Q の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i}$ である．また質点が P, Q にいる時刻をそれぞれ t_1, t_2 とすると $\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}_1$ $\boldsymbol{r}(t_2) = \boldsymbol{r}_2$, $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ である.

前節の一般論のやり方に従って運動方程式を線積分する．計算の途中経過を詳細に書いておくと,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} m\frac{\mathrm{d}^2(x\,\boldsymbol{i})}{\mathrm{d}t^2}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} kx\,\boldsymbol{i}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&\Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\mathrm{d}t = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\,\mathrm{d}\left\{v_x^2\right\} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \quad \left[\frac{1}{2}mv_x(t)^2\right]_{t_1}^{t_2} = -\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_x(t_2)^2 - \frac{1}{2}mv_x(t_1)^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_x(t_2)^2 + \frac{1}{2}kx(t_2)^2 = \frac{1}{2}mv_x(t_1)^2 + \frac{1}{2}kx(t_1)^2. \qquad (9.16)
\end{aligned}
$$

ここで, 5 番目の式以降 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x$ とした．以上から, この系の力学的エネルギー E は

$$
E \equiv \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (9.17)
$$

であり, (9.16) が力学的エネルギー保存則を表している．(9.17) の第 1 項が運動エネルギーで第 2 項がポテンシャルである．

9.5　エネルギー保存則の別の導出方法

9.3 節では運動方程式を線積分することによって, エネルギー保存則を導いた．本節では別の方法で議論してみる．ここで紹介する方法が, エネルギー保存則やエネルギーの時間発展方程式を導出する際の標準的な方法である．

9.5.1　一般論

9.3 節と同様に, 力がポテンシャル U から導かれる場合の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\boldsymbol{\nabla}U \tag{9.18}$$

を議論の出発点とする．(9.18) の両辺と速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ との内積を計算する:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\nabla}U\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{9.19}$$

(9.19) の左辺は (9.9) より, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}$ に等しい．一方, (9.19) の右辺は, (9.15) より, $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ に等しい．以上より, (9.19) は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}. \tag{9.20}$$

もしくは,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U\right) = 0. \tag{9.21}$$

と書き直せる．つまり, 運動エネルギー $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$ とポテンシャル U の和である全エネルギー $E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U$ は時間に依存しない: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$.

9.5.2　具体例 1

5.3 節で扱った自由落下問題のエネルギーおよびエネルギー保存則を議論してみる．一様な重力場中を運動する質点が従う運動を方程式を考える:

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} = -mg\boldsymbol{j}. \tag{9.22}$$

ここで, 鉛直方向をデカルト座標系の y 軸, 重力の向きと逆向きを y 軸の正の方向とした. $\boldsymbol{j}$ はデカルト座標系の y 方向の単位ベクトルである. 運動は鉛直方向のみとする. このとき (9.22) の両辺と速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ との内積を計算する:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -mg\boldsymbol{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{9.23}$$

(9.23) の左辺は,

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_y^2\right) \end{aligned}$$

となる. ここで速度の鉛直方向成分を v_y とした. 一方, (9.23) の右辺は,

$$\begin{aligned} -mg\boldsymbol{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= -mg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-mgy) \end{aligned}$$

に等しい. 以上より, (9.23) は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}mv_y^2 + mgy\right\} = 0 \tag{9.24}$$

と変形できる. つまり, 一様な重力場中の鉛直 1 次元運動では, 運動エネルギー $\frac{1}{2}mv_y^2$ とポテンシャル mgy の和である全エネルギー $E = \frac{1}{2}mv_y^2 + mgy$ は時間に依存しない: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$.

9.5.3　具体例 2

9.4 節で考察したバネに繋がれたおもりの振動を再び考える. 運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} = -kx\boldsymbol{i} \tag{9.25}$$

の両辺と速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ との内積を計算する:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -kx\boldsymbol{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{9.26}$$

(9.26) の左辺は,

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right) \end{aligned}$$

となる．ここで速度の x 方向成分を v_x とした．一方, (9.26) の右辺は,

$$\begin{aligned}-kx\boldsymbol{i} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= -kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)\end{aligned}$$

に等しい．以上より, (9.23) は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2\right\} = 0 \tag{9.27}$$

と変形できる．こうして再び力学的エネルギー (9.17) の保存則が得られる．