演習問題解答例 (12)

岩山隆寛 *

解答例を参考にするときの注意

解答例を参考にして宿題の解答を作成するときには, **必ず解答例を紙に印刷**して, 内容をよく理解, 確認してから自分の解答を作成するようにしてください. パソコンやスマートフォーンの画面で解答例を見た場合に, 数式に含まれている文字（アルファベットやギリシャ文字, ベクトルを表す太文字）が適切に表示されないことがあります.

演習問題*1

2. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ のとき, 次の偏微分 (a)〜(c) と勾配 (d) を計算しなさい.

（a） $\frac{\partial r}{\partial x}$

模範解答:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} \times (2x) \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
&= \frac{x}{r}
\end{aligned}
$$

（b） $\frac{\partial r}{\partial y}$

* 福岡大学理学部地球圏科学科. iwayama@fukuka-u.ac.jp

*1 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

模範解答:　前問において, $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$ と置き替えることにより,

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

を得る.

(c) $\frac{\partial r}{\partial z}$

模範解答:　前問と同様に置き替えによって

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

を得る.

(d) $\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}$

模範解答:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r} &= \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}\boldsymbol{i} + \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}\boldsymbol{j} + \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}\boldsymbol{k} \\
&= \left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}\right)\boldsymbol{k} \\
&= -\frac{x}{r^3}\boldsymbol{i} - \frac{y}{r^3}\boldsymbol{j} - \frac{z}{r^3}\boldsymbol{k} \\
&= -\frac{1}{r^3}\left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\right) \\
&= -\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}
\end{aligned}$$

を得る. ここで, 2 行目から 3 行目の変形には, (a)～(c) で得られた結果を利用した. また, 最後の表式は極座標系の動径方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ を用いて $\nabla\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ とも表現できます.

今回の宿題のポイント

1. 偏微分の計算を具体的に行ってみました.
2. 最後の問題は, 万有引力による位置のエネルギー（万有引力が作るポテンシャル）に関係します. $\boldsymbol{F} = -\nabla U$ を力 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャル U から導かれると表現し, 万有引力 $\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ のポテンシャルは $U = -\frac{GMm}{r}$ となることを意味しています. ここで, G は万有引力定数, M と m はそれぞれ太陽と地球の質量を表し, r はその間の距離です.