演習問題解答例 (11)

岩山隆寛 *

解答例を参考にするときの注意

解答例を参考にして宿題の解答を作成するときには, **必ず解答例を紙に印刷**して, 内容をよく理解, 確認してから自分の解答を作成するようにしてください. パソコンやスマートフォーンの画面で解答例を見た場合に, 数式に含まれている文字（アルファベットやギリシャ文字, ベクトルを表す太文字）が適切に表示されないことがあります.

演習問題[*1]

1. $\boldsymbol{A} = (2xy+1)\boldsymbol{i} + (x^2+2y)\boldsymbol{j}$ を $(x, y) = (0, 0)$ から $(x, y) = (1, 1)$ まで, 以下の経路 C_1, C_2, C_3 にそれぞれに沿って線積分しなさい.[*2]

   (a) C_1: 放物線 $y = x^2$.

   (b) C_2: 直線 $y = x$.

   (c) C_3: 次の経路に沿う直線: $(0, 0) \to (1, 0) \to (1, 1)$.

   模範解答:（a） 被積分関数における y は x^2 に置き換えられ, また $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$ と

* 福岡大学理学部地球圏科学科. iwayama@fukuka-u.ac.jp

*1 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

*2 どの経路でも答えは 3 になる.

変数変換することにより

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}_1} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}_1} (2xy+1)\,\mathrm{d}x + (x^2+2y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (2x^3+1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 2x(x^2+2x^2)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(8x^3+1\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[2x^4+x\right]_0^1 = 3.\end{aligned}$$

（b） 被積分関数における y は x に置き換えられ, また $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ と変数変換することにより

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}_2} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}_2} (2xy+1)\,\mathrm{d}x + (x^2+2y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (2x^2+1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x^2+2x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(3x^2+2x+1\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x^3+x^2+x\right]_0^1 = 3.\end{aligned}$$

（c） $(0,0)\to(1,0)$ を経路 $\hat{\mathrm{C}}_3$, $(1,0)\to(1,1)$ を経路 $\tilde{\mathrm{C}}_3$ とする．経路 $\hat{\mathrm{C}}_3$ では被積分関数における y は 0 に置き換えられ, また $\mathrm{d}y=0$, 経路 $\tilde{\mathrm{C}}_3$ では被積分関数における x は 1 に置き換えられ, また $\mathrm{d}x=0$ であることから

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}_3} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}_3} (2xy+1)\,\mathrm{d}x + (x^2+2y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x + \int_0^1 (1+2y)\mathrm{d}y \\ &= [x]_0^1 + \left[y+y^2\right]_0^1 = 3.\end{aligned}$$

今回の宿題のポイント

1. 線積分という積分について学びました.
2. 線積分の結果は始点と終点が同じでも, 積分の経路によって値が異なります. しかし積分関数が「ある性質」を満たす場合には, 線積分の値は経路によらず始点と終点の値だけで決まることを学びました. 「ある性質」は次回の授業で学びます.