第 8 章

ベクトルの掛け算, ベクトルの積分, 偏微分

これまでのいくつかの章で, 力 $\boldsymbol{F}$ が具体的に与えられたとき, 運動方程式を座標系の各成分に分解して積分を実行し, 質点の時々刻々の位置や速度を求めてきた. 引き続く章では力 $\boldsymbol{F}$ が具体的に与えられていない一般的な状況で, 運動方程式をベクトル形式のまま積分するという一般論を展開していく予定である. そのために必要な数学的知識をこの章で解説する.

8.1　ベクトルの掛け算：内積

ベクトルの足し算, 引き算は 2 章で既に導入した. ここではさらにベクトルの掛け算を導入する. ベクトルの掛け算には 2 種類ある. ベクトルどうしを掛けたときスカラー量になる掛け算（**内積**, もしくは**スカラー積**と呼ばれる）とベクトルどうしを掛けたときベクトル量になる掛け算（**外積**, もしくは**ベクトル積**と呼ばれる）の 2 種類である. ここでは前者の内積について解説する. 外積は後期に開講される力学 II で扱う.

8.1.1　内積の定義

二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ があったとき, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積を

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \tag{8.1}$$

と書く.

■注意：　$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の中黒「・」を忘れないで付けることが重要である. 例えば掛け算なので「・」の代わりに「×」と書く, 即ち $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ と書くと, これは $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積を

表すことになる. また何も記号を付けない場合には, どのような掛け算, 内積なのか外積なのか, が判別できない. 記号は省略せず正しいモノを付けなければならない.

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ は次のように定義される:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \equiv |A||B|\cos\theta. \tag{8.2}$$

ここで, θ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角度である.

8.1.2 内積の性質

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ がベクトル, p がスカラーのとき, 内積の定義 (8.2) から, 内積は次の性質を持つことがわかる:

1. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$. 可換則
2. $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$. 分配則
3. $p(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (p\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\cdot(p\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})p$. 分配則
4. $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が互いに直角ならば, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$.
   - デカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は互いに直交するので, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0$ である.
5. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = |A|^2$. したがって, $|A| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$.
   - デカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ大きさが 1 なので, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1$ である.
6. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ がデカルト座標系で次のように分解できるとき,

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k},$$

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積を成分を使って書き下すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \quad &= (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k})\cdot(B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}),\\ &= A_xB_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + A_xB_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} + A_xB_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\ &\quad +A_yB_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} + A_yB_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} + A_yB_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\ &\quad +A_zB_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} + A_zB_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} + A_zB_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\end{aligned} \tag{8.3}$$

となる. つまり $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ のおなじ成分どうしを掛けて和を取ればよい. この性質は座標系がデカルト座標系以外の直交座標系でも成り立つ性質である. 例えば, 2 次元極座標系で $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がそれぞれ

$$\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{e}_r + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta$$
$$\boldsymbol{B} = B_r\boldsymbol{e}_r + B_\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

と分解できるとする．ここで $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ はそれぞれ 2 次元極座標系の動径方向, 方位角方向の単位ベクトルである．このとき

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta$$

である．

7. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ で $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, $|\boldsymbol{B}| \neq 0$ なら $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ は直交する．

8.2 線積分

8.2.1 定義

あるベクトル $\boldsymbol{A}$ を経路 C に沿って積分する

$$\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{8.4}$$

を $\boldsymbol{A}$ の C に沿っての**線積分**という．被積分関数はベクトル量であるが, 線積分の結果はスカラー量であることに注意しなさい．内積の定義および, ベクトルをデカルト座標系で分解すると, $\boldsymbol{A}$ の C に沿っての線積分は

$$\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{C}} A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z \tag{8.5}$$

である．積分の始点と終点が同じであっても, その途中にどのような経路を取るかによって積分の値が異なる．しかしながら, $\boldsymbol{A}$ がある性質を満足するならば, $\boldsymbol{A}$ の線積分は経路に依存せず, 積分の始点と終点だけに依存するようになる．

8.2.2 線積分の具体例

1. $\boldsymbol{A} = (3x^2 - 6y)\boldsymbol{i} + (3x + 2y)\boldsymbol{j}$ を $(x, y) = (0, 0)$ から $(x, y) = (1, 1)$ まで次の経路 C_1, C_2, C_3 に沿って線積分しなさい．
   (a) C_1: 放物線 $y = x^2$.
   (b) C_2: 直線 $y = x$.
   (c) C_3: 次の経路に沿う直線: $(0, 0) \to (1, 0) \to (1, 1)$.
   模範解答: (a) 被積分関数における y は x^2 に置き換えられ, また $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$ と

変数変換することにより

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}_1} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}_1} (3x^2-6y)\,\mathrm{d}x + (3x+2y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (3x^2-6x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 2x(3x+2x^2)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(4x^3+3x^2\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x^4+x^3\right]_0^1 = 2.\end{aligned}$$

（b） 被積分関数における y は x に置き換えられ, また $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$ と変数変換することにより

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}_2} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}_2} (3x^2-6y)\,\mathrm{d}x + (3x+2y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (3x^2-6x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (3x+2x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(3x^2-x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

（c） $(0,0)\to(1,0)$ を経路 $\hat{\mathrm{C}}_3$, $(1,0)\to(1,1)$ を経路 $\tilde{\mathrm{C}}_3$ とする. 経路 $\hat{\mathrm{C}}_3$ では被積分関数における y は 0 に置き換えられ, また $\mathrm{d}y=0$, 経路 $\tilde{\mathrm{C}}_3$ では被積分関数における x は 1 に置き換えられ, また $\mathrm{d}x=0$ であることから

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}_3} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}_3} (3x^2-6y)\,\mathrm{d}x + (3x+2y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (3+2y)\mathrm{d}y \\ &= \left[x^3\right]_0^1 + \left[3y+y^2\right]_0^1 = 5.\end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{A}=(2xy+1)\boldsymbol{i}+(x^2+2y)\boldsymbol{j}$ を $(x,y)=(0,0)$ から $(x,y)=(1,1)$ まで, 前節問と同じ経路 C_1, C_2, C_3 にそれぞれに沿って線積分しなさい.[*1]

8.3 偏微分

8.2.2 節の線積分の例で, 関数によってはその線積分は経路の始点と終点にのみ依存して経路の詳細に依存しないことを見た. どのような関数の線積分が経路によらない値をと

[*1] どの経路でも答えは 3 になる.

るのか, を議論するために, さらに以下の数節でいくつかの数学的な概念を導入する.

前章までで扱ってきた微分は, 1 変数関数の微分であった. 空間 x, y, z やさらに時間 t にも依存する多変数関数の微分, **偏微分**, をここで導入する.

いま簡単化のため, x, y を独立変数とする 2 変数のスカラー関数 $f(x, y)$ を考える. この関数はさらに z にも依存する 3 変数関数でもよいし, 時間 t にも依存する 4 変数関数でもよい. また多変数に依存するベクトル関数であっても以下の話は成り立つ. とりあえず, 2 変数のスカラー関数で説明しておく. f の x に関する偏微分 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ とは以下の様に定義される:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}. \tag{8.6}$$

つまり, y はあたかも定数と考えて f を x に関して微分をするのである. 左辺で添え字の y は一定とおく変数を表している. 一定とおく変数が自明な場合には, 添え字は省略される場合がある. $\frac{\partial f}{\partial x}$ はデル エフ デル エックスと読む. 全く同様にして, f の y に関する偏微分は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \equiv \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \tag{8.7}$$

である. 2 変数以上の多変数関数や関数がベクトルであるときも同様に偏微分が定義できる.[*2]

1 変数関数 $g(x)$ の微分 $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ は, その関数のグラフの傾きであった. $\frac{\partial f}{\partial x}$ は y のある値に沿って, f の断面を取った時にできるグラフの (x 軸方向の) 傾きである. $\frac{\partial f}{\partial y}$ は x のある値に沿って, f の断面を取った時にできるグラフの (y 軸方向の) 傾きである.

8.4　全微分

ある点 (x, y) における 2 変数関数 $f(x, y)$ の値と, その近傍の点 $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$ における f の値との差 $\mathrm{d}f$

$$\mathrm{d}f \equiv f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y) \tag{8.10}$$

[*2] 3 変数関数 $f(x, y, z)$ の z に関する偏微分 $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}$ の定義は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \equiv \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z} \tag{8.8}$$

である. さらに, ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の x に関する偏微分 $\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\right)_{y,z}$ は

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\right)_{y,z} \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta x} \tag{8.9}$$

と定義される.

は f の全微分といい, 偏微分を用いて

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{8.11}$$

と書かれる．これは 1 変数関数 $g(x)$ における $\mathrm{d}g = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ に対応するものである．全く同様に 3 変数以上の関数にも全微分を導入できる.*3

8.5　勾配演算子

多変数のスカラー関数から多変数のベクトル関数を生成する演算子として勾配演算子もしくはナブラ, 記号で $\boldsymbol{\nabla}$ と書かれる, と呼ばれるものがある．ナブラの定義は 2 次元のデカルト座標系のときには

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} \tag{8.13}$$

である．3 次元への拡張は容易であろう.*4 $f(x,y)$ に $\boldsymbol{\nabla}$ を作用させたもの

$$\boldsymbol{\nabla} f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{j} \tag{8.15}$$

は grad$f$ とも書かれ, f **の勾配**と呼ばれ, それは (8.18) からわかるように $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ x, y 成分とするベクトルである.

■注意　$\boldsymbol{\nabla}$ はあたかもベクトルのように扱われる．そこで ∇ ではなく, $\boldsymbol{\nabla}$ とかかれる．またベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ などという演算も定義できる．しかしながら, $\boldsymbol{\nabla}$ が作用する関数と $\boldsymbol{\nabla}$ の順番には注意が必要で $\boldsymbol{\nabla} f \neq f\boldsymbol{\nabla}$ であるし, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ である．f の勾配を表すのは $\boldsymbol{\nabla} f$ であり $f\boldsymbol{\nabla}$ ではない．$\boldsymbol{\nabla}$ を含む演算は掛け算に関しては可換ではないのである.

$\boldsymbol{\nabla} f$ はベクトルなので, その方向や大きさはどのようなものであろうか．先ず方向について考える．f を地図上の (x,y) における標高と考えるとイメージがしやすいであろう．等高線は f の値が等しいところを連ねた線である．ある等高線上のある点 P と同じ等高

---

*3　$f(x,y,z)$ の全微分は

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{8.12}$$

である.

*4 3 次元のデカルト座標系の勾配演算子は

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{8.14}$$

である.

線上の点 P の近傍の点 Q を考える．P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ とすると, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は点 P における等高線の接線方向を向くベクトルである．点 P における $\boldsymbol{\nabla} f$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ の内積を計算すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{j}\right)\cdot(\mathrm{d}x\,\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\,\boldsymbol{j})\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}f. \end{aligned}\tag{8.16}$$

つまり, P と Q との間の f の全微分になる．しかしながら, P と Q は同じ等高線上の点であるので $\mathrm{d}f=0$ となる．したがって, $\boldsymbol{\nabla} f$ は $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ と垂直, 即ち等高線の接線と垂直な方向を向く．$\boldsymbol{\nabla} f$ の正の方向は f が大きくなる方向である．さらに, 等高線の間隔が狭いところほど大きくなる．

具体例: $\phi=x^2y+x+y^2$ の勾配は, $\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xy+1$, $\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2+2y$ なので, $\boldsymbol{\nabla} f=(2xy+1)\boldsymbol{i}+(x^2+2y)\boldsymbol{j}$ となる．これは 8.2.2 節の例 2 の場合の被積分関数に等しい．即ち, 8.2.2 節の例 2 の場合の被積分関数は, $\phi=x^2y+x+y^2$ の勾配によって導かれる．

8.6 線積分再訪

以上の知識を使って, 再び線積分を考えよう．位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$（デカルト座標系の成分で (x_1,y_1,z_1)）で表される点 P からある経路 C に沿って位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$（デカルト座標系の成分で (x_2,y_2,z_2)）で表される点 Q まで, あるベクトル $\boldsymbol{A}$ を線積分する．このとき, $\boldsymbol{A}$ があるスカラー関数 ϕ の勾配から導かれる, 即ち, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}\phi$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\ &= \int_{\mathrm{C}} \mathrm{d}\phi=\phi(x_2,y_2,z_2)-\phi(x_1,y_1,z_1)\end{aligned}\tag{8.17}$$

となり, 線積分の結果は経路の始点 $\boldsymbol{r}_1$ と終点 $\boldsymbol{r}_2$ のみに依存することになる．実際に, 8.2.2 節の例 2 の場合を再度扱ってみる．被積分関数 $\boldsymbol{A}=(2xy+1)\boldsymbol{i}+(x^2+2y)\boldsymbol{j}$ はスカラー関数 $\phi=x^2y+x+y^2$ の勾配で与えられることは前節の例で見た．そこで, このベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ を $(x,y)=(0,0)$ から $(x,y)=(1,1)$ まで, ある経路 C に沿って線積分し

てみると,

$$\begin{aligned}\int_C (2xy+1)\mathrm{d}x + (x^2+2y)\mathrm{d}y &= \int_C \boldsymbol{\nabla}(x^2y+x+y^2)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_C \mathrm{d}(x^2y+x+y^2) \\ &= \left[x^2y+x+y^2\right]_{(0,0)}^{(1,1)} = 3. \end{aligned} \tag{8.18}$$

つまり, 経路に依存せず線積分は始点と終点における ϕ の値で決まり, 3 となる. これは以前の計算と無矛盾である.

演習問題[*5]

1. $\boldsymbol{A} = (2xy+1)\boldsymbol{i} + (x^2+2y)\boldsymbol{j}$ を $(x, y) = (0, 0)$ から $(x, y) = (1, 1)$ まで, 以下の経路 C_1, C_2, C_3 にそれぞれに沿って線積分しなさい.[*6]
   (a) C_1: 放物線 $y = x^2$.
   (b) C_2: 直線 $y = x$.
   (c) C_3: 次の経路に沿う直線: $(0, 0) \to (1, 0) \to (1, 1)$.
2. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ のとき, 次の偏微分 (a)〜(c) と勾配 (d) を計算しなさい.
   (a) $\frac{\partial r}{\partial x}$
   (b) $\frac{\partial r}{\partial y}$
   (c) $\frac{\partial r}{\partial z}$
   (d) $\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}$

[*5] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

[*6] どの経路でも答えは 3 になる.