演習問題解答例 (10)

岩山隆寛 *

解答例を参考にするときの注意

解答例を参考にして宿題の解答を作成するときには, **必ず解答例を紙に印刷**して, 内容をよく理解, 確認してから自分の解答を作成するようにしてください. パソコンやスマートフォーンの画面で解答例を見た場合に, 数式に含まれている文字（アルファベットやギリシャ文字, ベクトルを表す太文字）が適切に表示されないことがあります.

演習問題[*1]

2. 以下の関数を $x = 0$ の周りで Taylor 展開しなさい.
   - 指数関数: e^x

     解答例: 関数 $f(x)$ を $x = 0$ の周りで展開すると

$$f(x) = f(0) + \frac{\mathrm{d}f(0)}{\mathrm{d}x}x + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 f(0)}{\mathrm{d}x^2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n f(0)}{\mathrm{d}x^n}x^n + \ldots \quad (1)$$

である.

指数関数は微分しても形の変わらない関数であり, 一般に任意の整数の n に対して

$$\frac{\mathrm{d}^n e^x}{\mathrm{d}x^n} = e^x, \quad (2)$$

* 福岡大学理学部地球圏科学科. iwayama@fukuka-u.ac.jp

*1 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

であり, したがって,

$$\left.\frac{\mathrm{d}^n e^x}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=0} = 1. \tag{3}$$

以上から, $x=0$ の周りで指数関数 e^x を Taylor 展開すると

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots . \tag{4}$$

となる.

- 余弦関数: $\cos x$

解答例: 前問と同様に,

余弦関数を微分すると,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x, \tag{5}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\cos x = -\cos x, \tag{6}$$
$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\cos x = \sin x, \tag{7}$$
$$\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}\cos x = \cos x, \tag{8}$$
$$\cdots\cdots \tag{9}$$

となる. 余弦関数の微分を $x=0$ で見積もると,

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x\right|_{x=0} = 0, \tag{10}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\cos x\right|_{x=0} = -1, \tag{11}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\cos x\right|_{x=0} = 0, \tag{12}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}\cos x\right|_{x=0} = 1, \tag{13}$$
$$\cdots\cdots \tag{14}$$

となる. つまり, 余弦関数の奇数階の微分は $x=0$ で見積もるとゼロになり, 余弦関数の偶数階の微分は $x=0$ で見積もると, 1 と -1 が交互に現れる. したがって,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots . \tag{15}$$

今回の宿題のポイント

- Taylor 展開は代表的な関数の近似方法なので, 計算できるようになりましょう.
- 多くの場合, Taylor 展開による関数の近似は x もしくは x^2 までを使います. 例えば, $e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. $\cos x \simeq 1 - \frac{1}{2}x^2$.
- (4) において $x = i\theta$ とおいて, 展開を実部, 虚部に分けて整理し, 正弦関数の Taylor 展開と余弦関数の Taylor 展開を用いると, Euler の公式が確かめられます. 実際に，自分で計算して確かめてみると良いでしょう.