

第 7 章

調和振動子（その 2）：振り子の運動

調和振動子の別の例として、振り子の運動を考察する。振り子の振れ角が小さい範囲に留まっている場合^{*1}には、振り子の運動も前節と同じ形の運動方程式によって支配される。したがって、このような場合では振り子の運動も単振動である。

一様重力場中の物体の運動やバネに繋がれた物体の運動ではデカルト座標系を用いて現象を記述してきた。しかしながら、振り子の運動には極座標系を用いるほうが便利である。そこでこの節では 2 次元極座標系の導入も行う。

7.1 問題設定

伸び縮みしない質量の無視できる長さ l の紐の片端に、質量 m の質点がむすびつけられており、鉛直 2 次元平面内において、紐のもう一方の端を支点とした紐のたるみがない状態で起こる質点の運動を考察する。座標の原点 O を支点にとり、鉛直下向きをデカルト座標系の x 軸の正の方向、それと垂直左向きに y 軸の正の方向をとる。質点に働いている力は、紐の張力 \mathbf{T} と重力のみとする (図 7.1 参照)。

質点の運動は、支点 O を中心とする半径 l の円の円弧の一部を軌道とするような運動となることが予測される。このような運動を考察するのに便利な座標系は、次節で説明する 2 次元極座標系である。

7.2 2 次元極座標系

振り子の問題からいったん離れて、2 次元平面内を自由に運動する質点を考える。ある瞬間における質点の位置を点 P とする。座標の原点を O とし、 \overrightarrow{OP} 方向は動径方向、動径方向と直角左向きは方位角方向と呼ばれる。動径方向の距離を $r \equiv |\overrightarrow{OP}|$ 、単位ベクトルを

^{*1} 微小振幅と呼ばれる場合

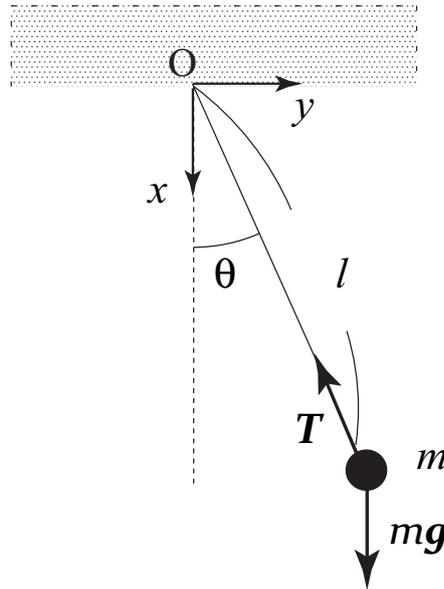


図 7.1 伸びない長さ l のひもの一端に繋がれた質量 m の物体が鉛直面内において紐のたるみがない状態で運動する様子. 鉛直方向からのひもの振れ角を θ とする.

e_r と表す. OP と x 軸のなす角を方位角といい, それを θ で表し, 方位角方向の単位ベクトルを e_θ とする. 定義により $r > 0$ であり, $\theta > 0$ は反時計回りの回転角, $\theta < 0$ は時計回りの回転角を表す (図 7.2 参照).

2次元極座標系は r と θ を使って空間中の点の位置を表す座標系である. デカルト座標系との大きな違いは, 2次元極座標系の単位ベクトルの向きは時間と共に変わることである. ある瞬間における質点の位置を基準にして動径方向と方位角方向を決めているので, 時間がたって質点の位置が変わると, デカルト座標系に対して動径方向と方位角方向の向きが変わることが想像できるであろう (図 7.2 参照). つまり, 2次元極座標系の単位ベクトルは時間の関数である: $e_r(t), e_\theta(t)$.

2次元極座標系における運動方程式を導くための準備をする. 質点の位置ベクトル \mathbf{r} は2次元極座標系で分解すると, 定義により

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad (7.1)$$

である. 運動方程式を2次元極座標系において分解するためには, \mathbf{r} の時間に関する2階微分 $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ の2次元極座標系における分解が必要である. それを計算するためには, 2次元極座標の単位ベクトルの時間微分 $\frac{de_r}{dt}, \frac{de_\theta}{dt}$ に関する関係式が必要である. 以下では, 幾何学的にそれを求めてみる. 計算による求め方は, 演習問題として (解答例付きで) 章末に用意されている.

ある時刻 t における質点の位置を P, $t + \Delta t$ における質点の位置を P' とする. $|\text{OP}| = r,$

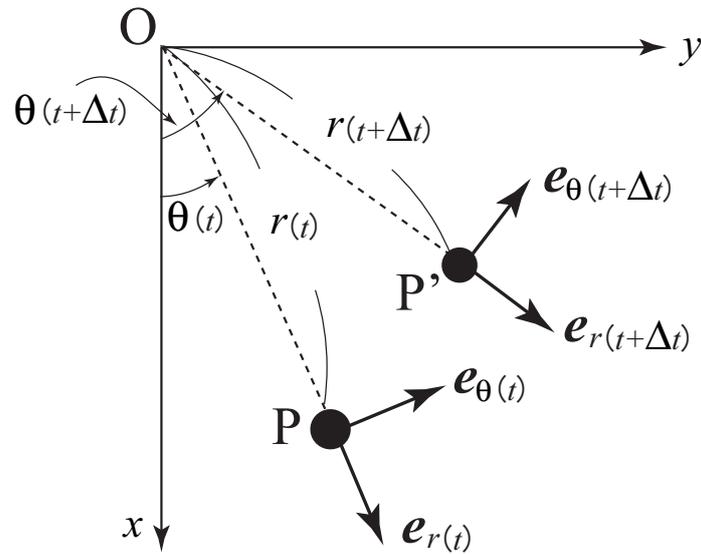


図 7.2 2次元極座標の単位ベクトル. 動径方向の単位ベクトルを e_r と方位角方向の単位ベクトルを e_θ は時間と共に向きが変わる.

$|\overrightarrow{OP'}| = r + \Delta r$, $\overrightarrow{OP'}$ は \overrightarrow{OP} から反時計回りに $\Delta\theta (\equiv \theta(t + \Delta t) - \theta(t))$ だけ回転しているとする. このとき, e_r の時間微分は微分の定義と $e_r(t)$, $e_r(t + \Delta t)$ の幾何学的関係を考慮すると

$$\begin{aligned}
 \frac{de_r(t)}{dt} &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e_r(t + \Delta t) - e_r(t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta e_\theta(t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} e_\theta(t) \\
 &= \frac{d\theta}{dt} e_\theta
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

となる (図 7.3 参照). 第 1 式から, 第 2 式への変形は $e_r(t + \Delta t) - e_r(t)$ はベクトルであり, その大きさは $e_r(t + \Delta t)$ と $e_r(t)$ とが角度 $\Delta\theta$ だけズレていることから, ($\Delta t \rightarrow 0$ の極限で) 半径が 1 で中心角が $\Delta\theta$ の円弧の長さに等しい. さらに, $e_r(t + \Delta t) - e_r(t)$ の向

きは $(\Delta t \rightarrow 0$ の極限で) \mathbf{e}_θ 方向であることからきている. 同様にして

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\theta(t)}{dt} &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_\theta(t + \Delta t) - \mathbf{e}_\theta(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta \times (-\mathbf{e}_r(t))}{\Delta t} \\ &= - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} \mathbf{e}_r(t) \\ &= - \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_r(t) \end{aligned} \quad (7.3)$$

を得る.

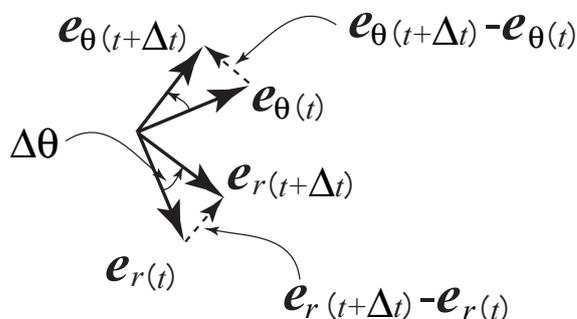


図 7.3 2次元極座標の単位ベクトルの変化. 単位ベクトルの微分を考えるために, 異なる時刻における単位ベクトルの始点を合わせて描いている.

以上の関係式を考慮すると, 速度と加速度の2次元極座標系における分解が求められる. 先ず, 速度 \mathbf{v} の2次元極座標系における分解を

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta$$

と表す. v_r, v_θ はそれぞれ速度 \mathbf{v} の動径方向, 方位角方向成分である. 一方, 速度は位置ベクトルの時間微分であることから

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d(r\mathbf{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \\ &= \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (7.4)$$

つまり,

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad (7.5a)$$

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \quad (7.5b)$$

である.

次に、加速度 \mathbf{a} の 2 次元極座標における分解を

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta$$

と表す. a_r, a_θ はそれぞれ加速度 \mathbf{a} の動径方向, 方位角方向成分である. 一方, 加速度は速度の時間微分であることから

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \\ &= \left\{ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \mathbf{e}_r + \left\{ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right\} \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (7.6)$$

である. つまり,

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad (7.7a)$$

$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (7.7b)$$

である.

7.3 運動方程式

問題設定に従って運動方程式をたて, それを 2 次元極座標系で分解する. 紐の張力 \mathbf{T} は 2 次元極座標で分解すると

$$\mathbf{T} = -T \mathbf{e}_r, \quad (7.8)$$

ここで $T > 0$ である. 重力を 2 次元極座標で分解すると

$$\mathbf{g} = g \cos \theta \mathbf{e}_r - g \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (7.9)$$

である. したがってベクトル形式の運動方程式

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} \quad (7.10)$$

を 2 次元極座標で分解すると, 紐は伸びないので $r = l$ (一定), $\frac{dr}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = 0$ に注意して

$$m \left[-l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r + l \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta \right] = (-T + mg \cos \theta) \mathbf{e}_r - mg \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (7.11)$$

となる. 動径方向成分, 方位角方向成分の運動方程式はそれぞれ

$$-ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -T + mg \cos \theta, \quad (7.12a)$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta, \quad (7.12b)$$

である。動径方向には質点は動いていない（常に $r = l$ の位置にある）。それゆえ質点に働いている力は動径方向には釣り合っている筈である。実際に (7.12b) の式を

$$\begin{aligned} ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - T + mg \cos \theta \\ = \frac{mv_\theta^2}{r} - T + mg \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

と変形すると、第1項は遠心力（動径方向正の方向）、第2項は紐の張力（動径方向負の方向）、第3項は重力の動径方向成分（動径方向正の方向）であり、これらの和がゼロになっていることがわかる。(7.12b) を解いて、 $\theta(t)$ を求めて (7.12a) に代入すると張力 T が決まる。^{*2} そこで、(7.12b) が解くべき微分方程式である。上で見てきたように、振り子の問題を極座標を使って扱うと、問題は θ に関する1次元問題になる。これが振り子の運動を極座標系を用いて記述する大きな理由である。

7.4 微小振幅振動

前節で導いた振り子の運動方程式 (7.12b) は非線形の微分方程式である。なぜならば、例えば (7.12b) の解 θ の定数倍は解ではないからである：

$$\begin{aligned} l \frac{d^2(c\theta)}{dt^2} &= cl \frac{d^2(\theta)}{dt^2} \\ &= c \times (-g \sin \theta) \\ &\neq -g \sin(c\theta). \end{aligned} \tag{7.13}$$

ここで、 c は任意定数である。(7.12b) は解ける非線形微分方程式の1つの例で、解は楕円関数と呼ばれるもので表現できることが知られている。しかしながら、ここではこの微分方程式を解くことは考えず、振り子の振幅が小さい場合（微小振幅振動）を考えることにする。 $|\theta| \ll 1$ のときには正弦関数は

$$\sin \theta \simeq \theta \tag{7.14}$$

と近似することができるので、このときには (7.12b) は次のように近似できる：

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta. \tag{7.15}$$

^{*2} 張力 T はあらかじめその値が与えられているわけではなく、運動方程式から然るべく決められるのである。

これは、前節で議論したバネ定数 k の線形バネに繋がれたおもりが従う運動方程式と数学的に同じ形である:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta, \quad (7.16)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (7.17)$$

例えば、初期条件 $\theta(0) = \theta_0$, $\frac{d\theta(0)}{dt} = 0$ を満たす (7.16) の解は $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$ であり、振動の周期 T は $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$ で与えられて、 T は初期振幅 θ_0 には依存しないことがわかる。振り子のこのような性質は振り子の等時性と呼ばれ、Galileo が発見した性質である。

7.5 Taylor 展開

(7.14) の近似をより一般的な立場、Taylor 展開もしくは Maclaurin 展開とも呼ばれる関数の近似法、から議論する。

無限階微分可能な任意の関数 $f(x)$ は $x = a$ の周りで

Taylor 展開

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{df(a)}{dx}(x-a) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(a)}{dx^2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{d^n f(a)}{dx^n}(x-a)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(a)}{dx^n}(x-a)^n \end{aligned} \quad (7.18)$$

と書ける。(7.18) は $f(x)$ の $x = a$ の周りの **Taylor 展開** と呼ばれる。(7.18) において $a = 0$ の場合は特別に **Maclaurin 展開** と呼ばれる。以下では Maclaurin 展開も含めて Taylor 展開と呼ぶことにする。 $\frac{d^n f(a)}{dx^n}$ は $f(x)$ を x に関して n 回微分し、その結果に $x = a$ を代入する、という意味である。

Taylor 展開は、任意の関数を n 次多項式で近似することを意味している。例えば、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad (7.19)$$

と表現したとする。ここで、 c_n は x に依存しない定数である。このとき、 c_n をどのように選んだらよいであろうか。 $x = a$ を両辺に代入すると $c_0 = f(a)$ を得る。次に、(7.19) の両辺を x で 1 階微分して、その結果に $x = a$ を代入すると、 $c_1 = \frac{df(a)}{dx}$ を得る。さらに (7.19) の両辺を x で 2 階微分して、その結果に $x = a$ を代入すると、 $c_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2f(a)}{dx^2}$ を得

る. このように次々に両辺を微分して $x = a$ を代入すると, c_n が決まり, 最終的に (7.18) が導ける.

代表的な関数の $x = 0$ の周りの Taylor 展開をいくつか書き下しておく:

- 指数関数: e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (7.20)$$

指数関数と指数関数の $x = 0$ の周りの Taylor 展開を図 7.4 に示す. Taylor 展開は, 展開を x の 1 次まで, 2 次まで, 3 次までで打ち切った場合を示している. $x = 0$ の近傍で Taylor 展開がもとの関数をよく近似しており, 展開の次数が高くなればより近似が良くなることを見て取れる. 正弦関数, 余弦関数の場合も同様である.

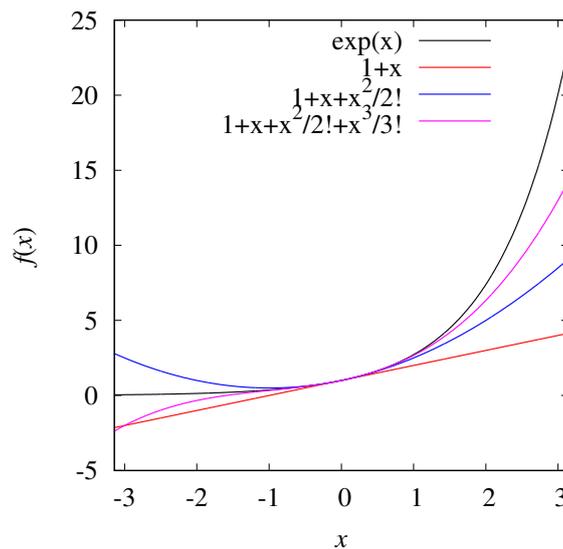


図 7.4 指数関数 (黒実線) とその Taylor 展開の比較. 指数関数の Taylor 展開を x の 1 次までで打ち切った場合 (赤実線), x の 2 次までで打ち切った場合 (青実線), x の 3 次までで打ち切った場合 (紫実線) を示している.

- 正弦関数: $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \quad (7.21)$$

正弦関数と正弦関数の $x = 0$ の周りの Taylor 展開を図 7.5 に示す. Taylor 展開は, 展開を x の 1 次まで, 3 次まで, 5 次までで打ち切った場合を示している.

- 余弦関数: $\cos x$

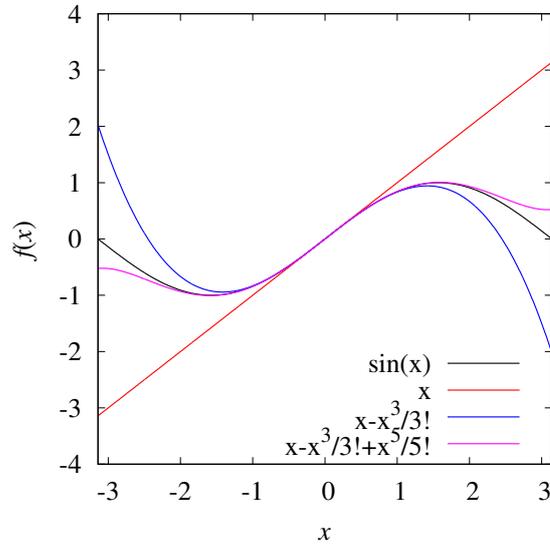


図 7.5 正弦関数 (黒実線) とその Taylor 展開の比較. 正弦関数の Taylor 展開を x の 1 次までで打ち切った場合 (赤実線), x の 3 次までで打ち切った場合 (青実線), x の 5 次までで打ち切った場合 (紫実線) を示している.

$$\cos x = 1 - x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \quad (7.22)$$

余弦関数と余弦関数の $x = 0$ の周りの Taylor 展開を図 7.6 に示す. Taylor 展開は, 展開を x の 2 次まで, 4 次まで, 6 次までで打ち切った場合を示している. (7.20) において $x = i\theta$ において, 展開を実部, 虚部に分けて整理すると Euler の公式が確かめられる.

(7.14) に戻る. (7.21) においてもし $x = 10^{-1}$ だとすると, 第 2 項の大きさは $\mathcal{O}(10^{-3})$, 第 3 項は $\mathcal{O}(10^{-5})$ となる.*3したがって, $x = 10^{-1}$ のときには 1% の誤差の範囲で $\sin x = x$ と近似できる.

*3 $\mathcal{O}(a)$ とはオーダー a と読み, せいぜい大きくても a 程度の大きさという意味である.

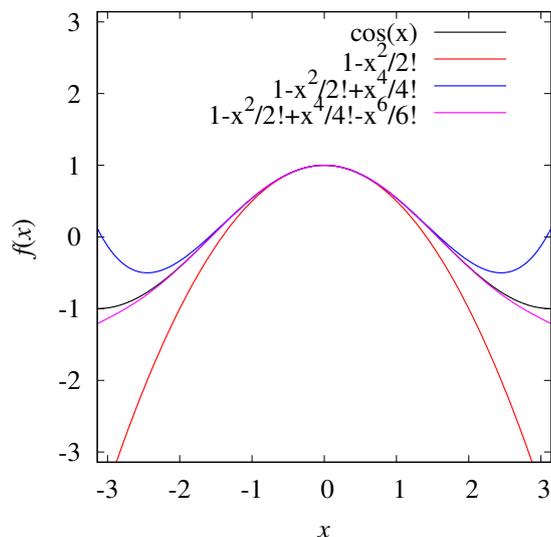


図 7.6 余弦関数 (黒実線) とその Taylor 展開の比較. 余弦関数の Taylor 展開を x の 2 次までで打ち切った場合 (赤実線), x の 4 次までで打ち切った場合 (青実線), x の 6 次までで打ち切った場合 (紫実線) を示している.

演習問題*4

1. 授業では 2 次元極座標系の単位ベクトルの時間微分を図を使用しながら幾何学的, 直感的に導きました. 以下では計算によって導いてみましょう.

- (a) 図 7.2 を参考に, 極座標系の単位ベクトル $e_r(t)$ と $e_\theta(t)$ をデカルト座標系の単位ベクトル i, j と θ を用いて書きなさい. (単位ベクトル $e_r(t)$ と $e_\theta(t)$ をデカルト座標系において分解する.)

解答例: 図 7.2 を参考に e_r は長さが 1 で x 軸方向と θ の角度を持っているので,

$$e_r = \cos \theta i + \sin \theta j \quad (7.23)$$

であることがわかる. 同様に,

$$e_\theta = -\sin \theta i + \cos \theta j \quad (7.24)$$

である.

- (b) 前節問で導いた単位ベクトル e_r と e_θ のデカルト座標系における分解を微分しなさい. ここで θ が時間の関数であることに注意しなさい.

*4 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

解答例: (7.23) を t に関して微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= -\frac{d\theta}{dt} \sin \theta \mathbf{i} + \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \mathbf{j} \\ &= \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j})\end{aligned}\quad (7.25)$$

を得る. 同様に, (7.24) を t に関して微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} &= -\frac{d\theta}{dt} \cos \theta \mathbf{i} - \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \mathbf{j} \\ &= -\frac{d\theta}{dt} (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})\end{aligned}\quad (7.26)$$

である.

(c) 以上から,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta, \\ \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} &= -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_r\end{aligned}$$

を導きなさい.

解答例: (7.25) に (7.24) を代入して,

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta,$$

を得る. 同様に (7.26) に (7.23) を代入して,

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_r$$

を得る.

2. 以下の関数を $x = 0$ の周りで Taylor 展開しなさい.

- 指数関数: e^x
- 余弦関数: $\cos x$