演習問題解答例 (8)

岩山隆寛 [*]

解答例を参考にするときの注意

解答例を参考にして宿題の解答を作成するときには, **必ず解答例を紙に印刷**して, 内容をよく理解, 確認してから自分の解答を作成するようにしてください. パソコンやスマートフォーンの画面で解答例を見た場合に, 数式に含まれている文字（アルファベットやギリシャ文字, ベクトルを表す太文字）が適切に表示されないことがあります.

演習問題[*1]

授業で扱った単振動の問題を演習問題として解いてみよう. ただし, 授業とは異なる初期条件を設定する.

2. 摩擦のない水平なテーブルの上にある質量 m の質点の運動を考察する. 質点にはバネ定数 k の線形バネがつながれていて, 質点にはバネの復元力のみが働いているとする. 水平方向にデカルト座標系の x 軸をとる. 質点の運動は x 方向のみの 1 次元問題とする. バネの自然長を座標の原点とする. このとき, この物体の任意の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を以下の設問に従って求めなさい.

   座標系の設定: 水平方向にデカルト座標系の x 軸をとる. 物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i}$, 速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は $\boldsymbol{v}(t) = v_x(t)\boldsymbol{i}$ と表される. ここで, x は物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の x 方向成分, $\boldsymbol{i}$ はデカルト座標系の x 方向の単位ベクトル, v_x は速度 $\boldsymbol{v}$ の x 方向成分である.

* 福岡大学理学部地球圏科学科. iwayama@fukuka-u.ac.jp

*1 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

初期条件:　物体は $t=0$ において, バネの自然長の位置, 即ち $\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{0}$, $(x(0)=0)$ にあり, 速さは V_0, 即ち $\boldsymbol{v}(0)=V_0\boldsymbol{i}$, $(v_x(0)=V_0)$, であったとする.

(a) 物体の運動を支配する運動方程式をベクトル形式で書きなさい. (質量 m と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$, 復元力の間に成り立つ関係式を書きくだす.)

解答例:　物体にはバネ定数 k の線形バネの復元力 (バネ伸びに比例する復元力) のみが働いているので, Newton の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-kx\boldsymbol{i} \tag{1}$$

である.

(b) 運動方程式の x 成分が満たす式を書きなさい.

解答例:　(1) をデカルト座標系において分解すると,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}=-kx\boldsymbol{i} \tag{2}$$

である. したがって, 運動方程式の x 成分が満たす式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx \tag{3}$$

である.

(c) 前節問で得られた方程式を解いて, 一般解を求めなさい.

解答例:　まず, (3) を m で割り,

$$\omega^2\equiv\frac{k}{m} \tag{4}$$

と定義する. このとき (3) は

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x \tag{5}$$

となる.

(3) の解を

$$x(t)=e^{\lambda t} \tag{6}$$

と推定する. このとき, (6) を (5) に代入すると,

$$\begin{aligned}\lambda^2e^{\lambda t}&=-\omega^2e^{\lambda t}\\ \Longrightarrow \lambda^2x&=-\omega^2x\end{aligned}$$

を得る．ここで非自明な解[*2] $x(t) \neq 0$ は

$$\lambda^2 = -\omega^2 \tag{7}$$

を満たす．(7) は 2 つの解 $\lambda = \pm i\omega$ を持つ．そこで, (5) の独立な 2 つの解

$$x_1 = e^{i\omega t}, \tag{8a}$$
$$x_2 = e^{-i\omega t} \tag{8b}$$

が得られた．(5) は線形の微分方程式なので, (5) の 2 つの独立な解が得られたらそれらを重ね合わせたものもその解になっている．そこで, (5) の一般解は, (8) を重ね合わせて

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \tag{9}$$

である．ここで c_1, c_2 は任意定数である．

（d）前設問で得られた $x(t)$ に含まれる任意定数を初期条件を利用して決定し, 初期条件を満たす運動方程式の解 $x(t)$ と $v_x(t)$ を求めなさい．

解答例: (9) に $t = 0$ を代入する:

$$x(0) = c_1 + c_2. \tag{10}$$

初期条件を考慮すると,

$$x(0) = c_1 + c_2 = 0 \tag{11}$$

となる．

一方, (9) を t に関して微分すると, 速度の x 方向成分 $v_x(t)$ を得る:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = i\omega\left(c_1 e^{i\omega t} - c_2 e^{-i\omega t}\right). \tag{12}$$

(12) に $t = 0$ を代入する:

$$v_x(0) = i\omega\left(c_1 - c_2\right). \tag{13}$$

初期条件を考慮すると,

$$v_x(0) = i\omega(c_1 - c_2) = V_0 \tag{14}$$

[*2] 任意の時刻で常に変位がゼロとなる解は, 当たり前の解, もしくは興味のない解である．そのような解のことを自明な解という．

となる．以上より，任意定数は連立方程式

$$c_1 + c_2 = 0, \tag{15}$$

$$i\omega(c_1 - c_2) = V_0 \tag{16}$$

を満たす．上式を満たす c_1, c_2 は

$$c_1 = -\frac{iV_0}{2\omega}, \tag{17}$$

$$c_2 = \frac{iV_0}{2\omega} \tag{18}$$

である．これらを一般解 (9) に代入し，Euler の公式を利用すると

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{iV_0}{2\omega}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) \\ &= -\frac{iV_0}{2\omega}\left\{(\cos\omega t + i\sin\omega t) - (\cos\omega t - i\sin\omega t)\right\} \\ &= \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t \end{aligned} \tag{19}$$

を得る．さらに速度の x 方向成分は (19) を時間 t で微分して，

$$v_x(t) = V_0\cos\omega t \tag{20}$$

となる．

(e) この振動運動の振幅と周期を答えなさい．

解答例：自然長からの変位 x は $x(t) = \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t$ で変化するので，この運動は単振動で，振動の振幅は $|V_0/\omega| = |V_0|\sqrt{\frac{m}{k}}$ であり，振動の周期 T は $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ である．振動の周期は初期条件に依存しない．(V_0 に依存していない.) 例えば，$x(0) = A$, $v_x(0) = 0$ を初期条件として与えたときの振動の周期と同じである．

(f) 得られた解から $\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$ が時間に依存せず，初期条件のみに依存することを示しなさい．

解答例：　三角関数の性質を利用すると

$$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = \left(\frac{\omega x}{V_0}\right)^2 + \left(\frac{v_x}{V_0}\right)^2 = 1 \tag{21}$$

を得る．$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ に注意すると，上式の中辺と左辺は

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}mV_0^2 \tag{22}$$

となる．つまり，$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$ は初期条件できまるある一定値 $\frac{1}{2}mV_0^2$ に等しいことがわかる．

今回の宿題のポイント

1. 微分方程式を解いて解を求めたときは，得られた解がもとの微分方程式を満足するかどうかを確かめてみるとよい．このことは得られた解を微分方程式に代入することで確かめられる．また得られた解が，初期条件を満足することも確かめてみるとよい．
2. 振動の周期は，初期条件に依存せず，バネに繋がれたおもりの質量 m とバネの堅さ（バネ定数 k）にのみ依存することをみました．
3. バネに繋がれたおもりの振動運動では $\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$ が時間に因らない一定値を持つことをみました．