

# 演習問題解答例 (7)

岩山隆寛 \*

— 解答例を参考にするときの注意 —

解答例を参考にして宿題の解答を作成するときには、必ず解答例を紙に印刷して、内容をよく理解、確認してから自分の解答を作成するようにしてください。パソコンやスマートフォンの画面で解答例を見た場合に、数式に含まれている文字（アルファベットやギリシャ文字、ベクトルを表す太文字）が適切に表示されないことがあります。

## 演習問題\*1

1. 実数  $t$  の関数  $x(t)$  が従う次のような微分方程式は、物理学の問題でよく現れる形のものである：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A\frac{dx}{dt} + Bx = 0. \quad (1)$$

ここで  $A, B$  は定数である。(1) は、定数係数の 2 階線形微分方程式と呼ばれるものである。微分方程式に含まれる微分の階数は 2 階微分 (左辺第 1 項) が最高階なので「2 階...」と呼ばれる。\*2 さらに、係数の  $A, B$  が定数であることから、「定数係数の...」と呼ばれる。

(1) が線形微分方程式であることを確かめなさい。(ヒント： $x_1, x_2$  が (1) の独立な解だと仮定したとき、 $c_1, c_2$  を任意定数として  $c_1x_1 + c_2x_2$  も (1) の解になっていることを確かめる。)

---

\* 福岡大学理学部地球圏科学科. iwayama@fukuka-u.ac.jp

\*1 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください。提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので。

\*2 因みに、左辺第 2 項は  $x$  の 1 階微分、左辺第 3 項は  $x$  の 0 階微分である。

解答例:  $x_1, x_2$  が (1) の独立な解だと仮定すると,  $x_1, x_2$  はそれぞれ

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + A\frac{dx_1}{dt} + Bx_1 = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + A\frac{dx_2}{dt} + Bx_2 = 0 \quad (3)$$

を満たす. そこで,  $c_1x_1 + c_2x_2$  を (1) の左辺に代入すると,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2(c_1x_1 + c_2x_2)}{dt^2} + A\frac{d(c_1x_1 + c_2x_2)}{dt} + B(c_1x_1 + c_2x_2) \\ &= c_1 \left( \frac{d^2x_1}{dt^2} + A\frac{dx_1}{dt} + Bx_1 \right) + c_2 \left( \frac{d^2x_2}{dt^2} + A\frac{dx_2}{dt} + Bx_2 \right) \\ &= c_1 \times 0 + c_2 \times 0 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

つまり  $c_1x_1 + c_2x_2$  は (1) の解である. そこで (1) は線形微分方程式である.

—— 今回の宿題のポイント ——

1. 線形微分方程式の持つ性質について学びました.
2. (力学に限らず) 今後の授業で登場する微分方程式が線形なのか, それとも非線形なのかを意識して授業を聞くだけでもモノの見方, 理解のレベルが変わってきます.