第 6 章

調和振動子（その 1）: バネに繋がれたおもりの振動

時間発展が三角関数で表されるような振動は**単振動**もしくは**調和振動**と呼ばれ, そのような系は**調和振動子**と呼ばれる. この章と引き続く章では, 調和振動子を考察する. 調和振動の例としては,

1. バネに繋がれたおもりの運動（ただし, 振動の振れ幅が小さい場合）
2. 振り子の運動（ただし, 振り子の振れ幅が小さい場合）

が挙げられる.

バネに繋がれたおもりや振り子の運動（振動現象）は日常的によく目にする現象なので, 素朴な興味としてそれらの運動を物理学で取り扱うことはごく自然であろう. しかしながら, これらを物理学において考える意義は他にもある. 物理学では自然現象を理想化し, 簡単な模型（**モデル**）を構築して, それを調べることによって自然現象を理解しようとする. 周期的に振動する現象は自然界に多くあり, そのような現象を理解するための一つのモデルとして調和振動子が使われるのである.

この章ではさらに, **線形**, **重ね合わせ**といった物理学において重要な概念も導入される.

6.1 問題設定

摩擦のない水平な[*1]テーブルの上にある質量 m の質点の運動を考察する. 水平方向にデカルト座標系の x 軸をとる. 質点の運動は x 方向のみの 1 次元問題とする. 質点にはバネ定数 k の線形バネがつながれていて, 質点にはバネの復元力のみが働いているとす

[*1] 重力の方向に対して垂直な平面.

る．バネの自然長（バネが伸びも縮みもしていないときの長さ）を座標の原点とする．このとき, 質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ を $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i}$ とデカルト座標系で分解したときの変位 $x(t)$ は, $x > 0$ のときはバネが伸びている状態を, $x < 0$ のときはバネが縮んでいる状態を表す．先ず, 変位 x を t の関数として求めることが当面の目標である (図 6.1 参照.)

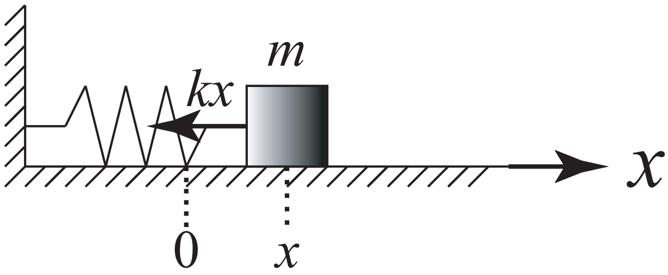

図 6.1　バネ定数 k の線形バネに繋がれた質量 m のおもりの運動．図は自然長からバネが x だけ伸びた状態を表しており, このときバネの復元力は x 軸の負の方向（変位と逆向き）で, バネは元の長さに戻ろうする.

6.2　言葉の定義

バネ定数 k の線形バネが質点に及ぼす復元力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = -kx\,\boldsymbol{i} \tag{6.1}$$

と表される．ここで $k > 0$ である．つまり力の大きさは質点の変位に比例し, (6.1) の負符号は力の向きが変位と逆向きであることを示している．バネ定数 k はバネの堅さに対応する．堅いバネは同じ変位に対して強い復元力が生じることが想像できるだろう．実際に (6.1) によると同じ変位 x に対して k が大きいほど復元力の大きさ $|\boldsymbol{f}| = k|x|$ は大きくなる.

(6.1) のような力と変位の間の関係は **Hooke の法則**とも呼ばれる.[*2]

[*2] 一般にバネの及ぼす力は, 変位 x の複雑な関数であろう．$\boldsymbol{F} = F(x)\,\boldsymbol{i}$ としたとき, $F(x)$ を $x = 0$ 近傍で Taylor 展開する:

$$F(x) = F(0) + \frac{\mathrm{d}F(0)}{\mathrm{d}x}x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2F(0)}{\mathrm{d}x^2}x^2 + \dots. \tag{6.2}$$

$F(0)$ は自然長のときの復元力で, それはゼロであろう．$\mathrm{d}F(0)/\mathrm{d}x = -k$, であり変位の高次の項（$x^2$ の以上の項）, は存在するであろうが, x が小さいとき，すなわち質点の変位が小さいときには x の高次の項は無視することができ, (6.1) が成り立つ.

6.3 初期条件

初期条件は $\boldsymbol{r}(0) = x(0)\boldsymbol{i} = A\,\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v}(0) = v_x(0)\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$ とする．即ち, A だけ変位させ, 速度ゼロで運動が始まる設定である．(成分が満足する初期条件は $x(0) = A$, $v_x(0) = 0$ である.)

6.4 運動方程式

以上の問題設定では, 質点の運動方程式はベクトル形式で

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -kx\,\boldsymbol{i} \tag{6.3}$$

となる．運動方程式の x 成分は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{6.4}$$

である．ここで $k > 0$, $m > 0$ なので (6.4) を m で割り,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2x \tag{6.5}$$

を得る．ここで

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m} \tag{6.6}$$

と定義した．(6.5) がいま解くべき微分方程式である．(6.5) は一様な重力場中の運動方程式（微分方程式）のように単純に積分するだけでは解は求められない.[*3] まず, (6.5) を解く前にそれが持つ性質を議論しておく.

6.5 線形微分方程式の性質: 線形, 重ね合わせ

ある微分方程式が次の 2 つの性質を持つとき, その微分方程式は**線形微分方程式**と呼ばれる：

1. ある微分方程式が 2 つの独立な解, x_1 と x_2, を持つとき,[*4] $x_1 + x_2$ もその微分方程式の解になっている.

[*3] (6.5) を単純に 2 回積分すると, $x(t) = -k\int\left(\int x\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}t$ となる．この問題では x を t の関数として求めたいのであるが, 右辺の積分は x が t のどのような関数であるかを知らなければ積分は実行できない．つまり, (6.5) を単純に積分しただけでは (6.5) の解は求められない.

[*4] $x_1 \neq x_2$ であり, x_1 は x_2 の定数倍ではないことを指す.

2. ある微分方程式の解を定数倍したものも, その微分方程式の解になっている.

実際に, (6.5) が上記の 2 つの性質を持っていることを確かめてみる. 先ず, x_1 と x_2 はそれぞれ (6.5) の解であるので,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x_1,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x_2$$

を満たす. そこで,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 (x_1 + x_2)}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} \\ &= -\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 \\ &= -\omega^2 (x_1 + x_2) \end{aligned} \tag{6.7}$$

となり, 確かに $x_1 + x_2$ は (6.5) の解になっている. さらに, c を任意定数として, cx が (6.5) の解になっていることは

$$\frac{\mathrm{d}^2 (cx)}{\mathrm{d}t^2} = c\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{6.8}$$
$$= c \times (-\omega^2 x)$$
$$= -\omega^2 (cx) \tag{6.9}$$

であることから確かめられる. つまり, (6.5) は線形微分方程式である.

上記の 1 と 2 の性質は次のように 1 つの文章にまとめられる:

線形微分方程式と解の重ね合わせ

ある微分方程式が独立な解, x_1 と x_2, を持つとき, c_1 と c_2 を任意定数として $c_1 x_1 + c_2 x_2$ もその微分方程式の解になっていれば, その微分方程式は**線形微分方程式**と呼ばれ, $c_1 x_1 + c_2 x_2$ は解の**重ね合わせ**と呼ばれる.

線形微分方程式はいくつかの特有の形を持ち, その形に応じて解析的に解く方法[*5]が知られている. 一方, 線形でない微分方程式は**非線形微分方程式**と呼ばれ, それらが解ける例は限られている. 一般的には非線形微分方程式は解析的には解けない. 大学の授業で扱う微分方程式は, ほとんどの場合, 線形微分方程式である.

[*5] 手で解ける方法, 初等関数で解を表現する方法.

6.6　運動方程式の解：線形微分方程式の解法

(6.5) を解くには, それが線形微分方程式であるという性質を用いる. 独立な 2 つの解を見つければ, それらを重ね合わせれば, 解を構成できるのである. その解は, 任意定数を含むので一般解である.

ここでは**推定法**[*6]と呼ばれる方法で (6.5) の 2 つの独立な解を見つけてみる. (6.5) の解を

$$x = e^{\lambda t} \tag{6.10}$$

と推定する. (6.10) を (6.5) に代入し, 非自明な解[*7] ($x \neq 0$) が満たす条件を求めると,

$$\lambda^2 = -\omega^2,$$

もしくは

$$\lambda = \pm i\omega, \tag{6.11}$$

を得る. つまり, (6.11) を (6.10) に戻すと, $x_1 = e^{i\omega t}$ と $x_2 = e^{-i\omega t}$ という 2 つの独立な解が見つかった. (6.5) は線形の微分方程式なので, これらを重ね合わせた

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \tag{6.12}$$

も (6.5) の解である. ここで c_1, c_2 は任意定数である. この解は任意定数を含むので, (6.5) の一般解である.

初期条件を満足するように c_1, c_2 を決定する. 初期位置 $x(0) = A$ より

$$x(0) = c_1 + c_2 = A, \tag{6.13}$$

さらに (6.12) を t に関して微分したものは速度の x 方向成分 v_x である:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = i\omega\left(c_1 e^{i\omega t} - c_2 e^{-i\omega t}\right). \tag{6.14}$$

この式に $t = 0$ を代入し, さらに初速度はゼロ（$v_x(0) = 0$）であることを考慮すると

$$v_x(0) = i\omega(c_1 - c_2) = 0, \tag{6.15}$$

[*6] この呼び方は, 私が大学 1 年生の時に受講した「物理数学」の授業で登場した. この呼び方は, 方法をよく表しているのだが, 一般的には通用しないので, 使用する際には注意が必要である.

[*7] 任意の時刻で $x = 0$ となる解は確かに微分方程式 (6.10) の解になっているが, このような解は当たり前の解, もしくはつまらない解, であり自明な解と呼ばれる. 一方自明でない解は非自明な解と呼ばれる.

を得る. これらから,

$$c_1 = c_2 = \frac{A}{2}, \tag{6.16}$$

が得られ, これらを (6.12) に代入して Euler の公式を使用して整理すると, 初期条件を満足する (6.5) の解が得られる:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2}e^{i\omega t} + \frac{A}{2}e^{-i\omega t} \\ &= \frac{A}{2}\left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right) + \frac{A}{2}\left(\cos\omega t - i\sin\omega t\right) \\ &= A\cos\omega t. \end{aligned} \tag{6.17}$$

6.7　解の性質

(6.17) において $|A|$ は**振幅**と呼ばれる. なぜならば余弦関数 $\cos\theta$ は ± 1 の範囲に収まるので, (6.17) で表される質点の運動は変位の絶対値が $|A|$ の範囲に収まるからである. さらに余弦関数は 2π 周期（$\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi)$）であることから, 次のような時刻 T が存在するはずである:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega t \\ &= A\cos\left(\omega t + 2\pi\right) \\ &= A\cos\left[\omega(t+T)\right] \\ &= x(t+T). \\ &\therefore \quad \omega T = 2\pi. \end{aligned} \tag{6.18}$$

つまり, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ だけ時間が経つと質点の変位は元に戻る. この T は**周期**と呼ばれる. ω は**角振動数**と呼ばれる.[*8] 1 周期 T だけ時間が経つと, 振動が 1 回終わるので, 逆に 1 秒間の振動の回数は $1/T = \omega/(2\pi)$ で与えられるからである.

この問題で見たように調和振動子の振動の周期 $T(= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}})$ や振動数 $\omega(= \sqrt{\frac{k}{m}})$ は振幅 $|A|$ に依存しない. Hooke の法則が成り立つ範囲であれば, 初期振幅をどのように選ぼうと振動の周期は変わらない（質点の質量 m とバネの堅さ k によって決まる）のである. この性質は, 調和振動子の最も重要な性質である. 実際に異なる初期条件のもとで問題を解いてこのことを確かめてみよう (演習問題参照).

6.8　議論

運動方程式を解いて得られた解の性質をもう少し議論してみる.

[*8] 単に振動数とも呼ばれる.

先ず, (6.17) を t に関して微分すると速度の x 方向成分 $v_x(t)$ が得られる:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega \sin \omega t. \tag{6.19}$$

三角関数は $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ という性質を満足することから, (6.17) と (6.19) より

$$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = \left(\frac{v_x}{A\omega}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1 \tag{6.20}$$

を得る. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ に注意し, 上式の中辺と右辺を変形すると

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \tag{6.21}$$

となることがわかる. 上式は, 左辺の量が時間に因らず初期条件で決まったある一定の値 $\frac{1}{2}kA^2$ に常に保たれていることを示している. 物理学では時間に依存しない量は**保存量**と呼ばれる. (6.21) は $\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$ が保存量であることを述べている. この量は今考えた初期条件と異なる初期条件のもとでの解でも, 保存量になっている (演習問題参照). 後で見るように, この量はエネルギーと呼ばれるものである.

演習問題[*9]

1. 実数 t の関数 $x(t)$ が従う次のような微分方程式は, 物理学の問題でよく現れる形のものである:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Bx = 0. \tag{6.22}$$

ここで A, B は定数である．(6.22) は, **定数係数の 2 階線形微分方程式**と呼ばれるものである．微分方程式に含まれる微分の階数は 2 階微分 (左辺第 1 項) が最高階なので「2 階...」と呼ばれる.[*10] さらに, 係数の A, B が定数であることから,「定数係数の...」と呼ばれる.

(6.22) が線形微分方程式であることを確かめなさい．(ヒント：x_1, x_2 が (6.22) の独立な解だと仮定したとき, c_1, c_2 を任意定数として $c_1x_1 + c_2x_2$ も (6.22) の解になっていることを確かめる.)

2. 授業で扱った単振動の問題を演習問題として解いてみよう．ただし, 授業とは異なる初期条件を設定する.

摩擦のない水平なテーブルの上にある質量 m の質点の運動を考察する．質点にはバネ定数 k の線形バネがつながれていて, 質点にはバネの復元力のみが働いているとする．水平方向にデカルト座標系の x 軸をとる．質点の運動は x 方向のみの 1 次元問題とする．バネの自然長を座標の原点とする．このとき, この物体の任意の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を以下の設問に従って求めなさい.

(a) 物体の運動を支配する運動方程式をベクトル形式で書きなさい. (質量 m と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$, 復元力の間に成り立つ関係式を書きくだす.)
(b) 運動方程式の x 成分が満たす式を書きなさい.
(c) 前節問で得られた方程式を解いて, 一般解を求めなさい.
(d) 前設問で得られた $x(t)$ に含まれる任意定数を初期条件を利用して決定し, 初期条件を満たす運動方程式の解 $x(t)$ と $v_x(t)$ を求めなさい.
(e) この振動運動の振幅と周期を答えなさい.
(f) 得られた解から $\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$ が時間に依存せず, 初期条件のみに依存することを示しなさい.

[*9] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください．提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

[*10] 因みに, 左辺第 2 項は x の 1 階微分, 左辺第 3 項は 0 階微分である.