演習問題解答例 (6)

岩山隆寛 *

解答例を参考にするときの注意

解答例を参考にして宿題の解答を作成するときには, 必ず解答例を紙に印刷して, 内容をよく理解, 確認してから自分の解答を作成するようにしてください. パソコンやスマートフォーンの画面で解答例を見た場合に, 数式に含まれている文字（アルファベットやギリシャ文字, ベクトルを表す太文字）が適切に表示されないことがあります.

演習問題[*1]

運動方程式を導入したので, 運動方程式を解いて簡単な物体の運動を考察してみよう. ここでは高等学校の物理基礎で扱った最も簡単な運動を例にとる.

1. 重力加速度の大きさが g で表される一様な重力の作用のみを受けて運動する質量 m の物体 (質点) を考える. この物体の任意の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を以下の設問に従って求めなさい.

   座標系の設定: 鉛直上向きにデカルト座標系の y 軸をとり, y 座標の向かって右向きに x 軸をとる. 物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$, 速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は $\boldsymbol{v}(t) = v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j}$ と表される. ここで, x と y はそれぞれ物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の x, y 方向成分, $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ はそれぞれデカルト座標系の x, y 方向の単位ベクトル, v_x と v_y はそれぞれ速度 $\boldsymbol{v}$ の x, y 方向成分である.

   初期条件: 物体は $t = 0$ において, 高さ H, 即ち $\boldsymbol{r}(0) = H\boldsymbol{j}$, $(x(0) = 0, y(0) =$

* 福岡大学理学部地球圏科学科. iwayama@fukuka-u.ac.jp

*1 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

H), に存在し, 速度はゼロ, 即ち $\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{0}$, ($v_x(0)=0$, $v_y(0)=0$), であったとする.

(a) 単位質量の物体に働く重力を $\boldsymbol{g}$ と表すことにする. このとき, 物体の運動を支配する運動方程式をベクトル形式で書きなさい. (質量 m と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の時間微分 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$, 重力 $\boldsymbol{g}$ の間に成り立つ関係式を書きくだす.)

解答例: 物体には重力のみが作用しているので, Newton の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=m\boldsymbol{g} \tag{1}$$

である.

(b) 運動方程式の各成分が満たす式を書きなさい.

解答例: (1) をデカルト座標系において分解すると,

$$m\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}\right)=-mg\boldsymbol{j} \tag{2}$$

である. したがって, 運動方程式の x, y 成分が満たす式はそれぞれ

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=0, \tag{3}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-mg \tag{4}$$

である.

(c) 前節問で得られた方程式を時間 t に関して積分することにより, 速度の x, y 方向成分 $v_x(t)$, $v_y(t)$ を時間の関数として書き下しなさい.

解答例: まず, v_x を求める. (3) を m で割ると,

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=0 \tag{5}$$

である. この式の両辺を t に関して不定積分する. このとき,

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=0\\ \Longrightarrow\ & v_x(t)=C_1.\end{aligned} \tag{6}$$

ここで, C_1 は積分定数 (任意定数) である. 上式は $t=0$ を代入すると, $v_x(0)=C_1$ となる. また初期条件は, $v_x(0)=0$ である. したがって $C_1=0$ であり, 任意の時刻 t において質点の速度の x 成分は

$$v_x(t)=0 \tag{7}$$

である．

同様に, v_y を求める．(4) を m で割ると,

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g \tag{8}$$

である．この式の両辺を t に関して不定積分する．このとき,

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t &= -\int g\,\mathrm{d}t \\ \Longrightarrow v_y(t) &= -gt + C_2. \end{aligned} \tag{9}$$

ここで, C_2 は積分定数 (任意定数) である．上式は $t=0$ を代入すると, $v_y(0) = C_2$ となる．また初期条件は, $v_y(0) = 0$ である．したがって $C_2 = 0$ であり, 任意の時刻 t において質点の速度の y 成分は

$$v_y(t) = -gt \tag{10}$$

である．

(d) 前設問で得られた速度の x, y 方向成分を時間 t に関して積分することにより, 物体の位置 $x(t)$, $y(t)$ を t の関数として書き下しなさい．

解答例: 位置 x と速度の x 成分 v_x とは $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x$ で与えられることを考慮すると, (7) は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{11}$$

と書ける．この式の両辺を t に関して不定積分する．このとき,

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t &= 0 \\ \Longrightarrow x(t) &= C_3. \end{aligned} \tag{12}$$

ここで, C_3 は積分定数 (任意定数) である．上式は $t=0$ を代入すると, $x(0) = C_3$ となる．また初期条件は, $x(0) = 0$ である．したがって $C_3 = 0$ であり, 任意の時刻 t において質点の位置 x は

$$x(t) = 0 \tag{13}$$

である．

同様に位置 y と速度の y 成分 v_y とは $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y$ で与えられることを考慮すると, (10) は

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -gt \tag{14}$$

と書ける．この式の両辺を t に関して不定積分する．このとき,

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t &= -\int gt\,\mathrm{d}t \\ \Longrightarrow y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + C_4. \end{aligned} \tag{15}$$

ここで, C_4 は積分定数 (任意定数) である．上式は $t = 0$ を代入すると, $y(0) = C_4$ となる．また初期条件は, $y(0) = H$ である．したがって $C_4 = H$ であり, 任意の時刻 t において質点の位置 y は

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H \tag{16}$$

である．

今回の宿題のポイント

1. ここで考察した問題は, 「**自由落下問題**」としばしば参照されるものである．[a]
2. 運動方程式を利用して物体の運動の状態, 任意の時刻における速度と位置ベクトル, を決定する例を示しました．
3. 運動方程式を積分すると, 積分定数が現れるので, それを決定するために初期条件が使用されました．
4. このような議論の仕方は, 他の例, ばねの弾性力を受けて運動する物体, 万有引力を受けて運動する物体でも全く同様です．
5. 講義では放物運動を扱いました．放物運動と自由落下とは同じ運動方程式に従います．そこで, 運動方程式の一般解は同じです．しかし初期条件の違いによって両者の速度や位置が異なります．いわゆる鉛直投げ上げ, 鉛直投げ下ろしの場合も全く同様で, 自由落下と同じ運動方程式に従います．

[a] (16) は自由落下する物体の位置を表す公式として, 高等学校の物理基礎の教科書に掲載されている式である．