第 5 章

一様な重力場中の質点の運動

前章で運動方程式が提示されたので, 本章を含むいくつかの章で具体的な力が与えられたときに運動方程式を解いて, その力の作用のもとでの物体の運動を考察してみよう.

5.1　目的, 理想化

地球上で起こる日常経験する物体の運動を考察する. 物体をもちろん質点と理想化して扱う. その他にも問題を簡単化するために, 以下で述べるいくつかの理想化を行う.

地球上の物体には, 地球による引力が働いている. この引力は**重力**と呼ばれている. 重力の大きさは物体の質量に比例し, その方向は地球の中心を向く方向である. 単位質量当たりの物体に働く重力を $\boldsymbol{g}$ と表す. $1\,\mathrm{kg}$ の物体に働く重力の大きさ $g(=|\boldsymbol{g}|)$ は地球の緯度, 経度, 高度に依存して変化することが知られている. しかしながら, 日常生活で経験する物体の運動がおこる範囲内では g は定数とみなしてよく, その大きさは $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ である[*1]

さらに, 日常生活で経験する物体の運動がおこる範囲内では地球が球である効果や地球が自転している効果を無視してよく, 物体の運動をデカルト座標系を用いて記述することにする. 重力のかかっている方向と平行な方向を**鉛直**方向 , 重力の向きと逆向きを**鉛直上向き**と定義するのが座標系の張り方の慣例である.

このように重力の大きさが一様な場合を, **一様な重力場中**と呼ぶ. 重力場の「場」とは物理用語で一般に時間と空間に依存した物理量を**場の量**と呼ぶ. 重力は時間には依存しないが, 空間に依存した場の量である. 「一様」とは物理学では空間に依存しないという性

[*1] 重力の大きさの変化は, 高度に伴う変化が緯度・経度にともなう変化よりも大きい. 赤道と極とでは重力の大きさは 0.5 % ほどしか変わらない. 一方, 高度 100 km の上空における重力の大きさは地上のその値に比べて 3 % ほど小さくなる. なお, 国際線の飛行機が飛ぶ高さは十数キロメートルである. これらのことから, 日常の生活圏で重力の大きさはほとんど一定とみなしてよいことがわかる. 正確な重力の大きさは, 国土地理院の WEB ページ `http://www.gsi.go.jp/`を通じて知ることができる.

質を指すときに使用する言葉である．本章では上で述べたように (時間にも) 空間にも依存しない重力が物体に作用している場合を考えるので, 章のタイトルを「一様な重力場」と記述している．

5.2　放物運動

5.2.1　問題設定

一様な重力場中を運動する質量 m の質点の運動を考察する．任意の時刻 t における質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ がわかれば問題は解けたことになる．質点の運動は簡単化のために鉛直 2 次元平面内で起こるとし, デカルト座標系の y 軸は鉛直上向き, y 軸に直角右向きに x 軸をとる．質点に働く力は重力のみとする．デカルト座標系での位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と速度 $\boldsymbol{v}$ の分解をそれぞれ,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t) &= x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{v}(t) &= v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

とする．ここで, x, y はそれぞれ位置ベクトルの x, y 成分, v_x, v_y はそれぞれ速度の x, y 成分, $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ はそれぞれ x, y 方向の単位ベクトルである．

時刻 $t = 0$ における物体の運動状態は**初期条件**と呼ばれる．ここでは $t = 0$ における物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(0)$ を座標系の原点, 即ち $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$, に設定する．さらに $t = 0$ における物体の速度, **初速度**, $\boldsymbol{v}(0)$, の大きさを V_0 とする．即ち, $|\boldsymbol{v}(0)| = V_0$ であり, 初速度 $\boldsymbol{v}(0)$ と x 軸とのなす角度を θ とする: $\boldsymbol{v}(0) = v_x(0)\boldsymbol{i} + v_y(0)\boldsymbol{j} = V_0 \cos\theta\, \boldsymbol{i} + V_0 \sin\theta\, \boldsymbol{j}$ である．

5.2.2　運動方程式

物体の運動を記述する運動方程式は, 今の問題設定では

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\boldsymbol{g} \tag{5.1}$$

である．ここで, $m \neq 0$ なので (5.1) の両辺を m で割り, さらにベクトルをデカルト座標系で分解すると

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} = -g\boldsymbol{j} \tag{5.2}$$

である.[*2] したがって, 運動方程式の x, y 方向の成分はそれぞれ

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0, \tag{5.3a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -g \tag{5.3b}$$

となる.

(5.3) のように微分を含んだ方程式は**微分方程式**と呼ばれる. 一般に, 微分方程式はその型によって解き方が知られている. (5.3) は最も簡単な微分方程式で単純に両辺を t で積分することで解を求めることができる.

先ず (5.3a) を解いてその解 $x(t)$ を求める. (5.3a) の両辺を t に関して不定積分すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C_1 \tag{5.4}$$

を得る. ここで, C_1 は不定積分に際して現れた任意定数 (積分定数) である. (5.4) の両辺をさらに t で不定積分して

$$x(t) = C_1 t + C_2 \tag{5.5}$$

を得る. ここで C_2 も不定積分に際して現れた任意定数 (積分定数) である. (5.5) が (5.3a) の解で**一般解**と呼ばれる. (5.5) のように任意定数を含む微分方程式の解は一般解と呼ばれる. 任意定数の値は初期条件によって決定される. 任意定数の個数と初期条件の個数は一致していないと, 任意定数の値は一意には決まらない. 任意定数の値を決める前に, (5.3b) の一般解を先に求めておく. 求め方は (5.5) を求める際に行ったやり方と全く同様で, (5.3b) の両辺を t に関して 2 回不定積分すればよい. その結果は

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_4 \tag{5.6}$$

である. 再び, C_3, C_4 は任意定数である.

任意定数 C_1, C_2 を決定する. (5.5) において $t = 0$ とおく. さらに初期条件を考慮すると,

$$x(0) = C_2 = 0 \tag{5.7}$$

を得る. 同様に, $\boldsymbol{v}$ の x 成分 v_x は $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C_1$ なので, この式で $t = 0$ とおき, 初期条件を考慮すると

$$v_x(0) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = C_1 = V_0 \cos\theta \tag{5.8}$$

[*2] 地球の引力は鉛直下向きなので, $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{j}$ であることに注意する.

を得る.[*3] 以上をまとめると初期条件を満足する (5.3a) の解は

$$x(t) = V_0 \cos\theta\, t$$

である.

同様にして, (5.3b) の一般解に含まれる初期条件も $C_3 = V_0 \sin\theta$, $C_4 = 0$ と決まり, 最終的に初期条件を満足する (5.3b) の解は

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\theta\, t$$

である.

以上をまとめると, 一様重力場中において原点から初速度 $\boldsymbol{v}(0) = V_0 \cos\theta\, \boldsymbol{i} + V_0 \sin\theta\, \boldsymbol{j}$ で運動を始めた物体の運動は, 位置ベクトルの x, y 成分がそれぞれ

$$x(t) = V_0 \cos\theta\, t, \tag{5.9a}$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\theta\, t, \tag{5.9b}$$

であり, 速度の x, y 成分がそれぞれ

$$v_x(t) = V_0 \cos\theta, \tag{5.10a}$$
$$v_y(t) = -gt + V_0 \sin\theta, \tag{5.10b}$$

である.

5.2.3　議論

運動方程式を数学的に解いただけでなく, 得られた解からわかる物体の運動の特徴について考察する.

運動方程式 (5.3a) から, 今の問題設定では x 方向には何の力が働いていなかった. この状況は Newton の第 1 法則が適用される状況である. 実際に得られた解 (5.10a) は時間 t に依存せず, 初速度の x 成分と同じ大きさの速度を表している. したがって, 得られた解は Newton の第 1 法則と無矛盾である.

質点の軌道を求めてみる. 質点の軌道は (5.9) から t を消去して x と y の関係式を求めることで得られる. (5.9a) から

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\theta} \tag{5.11}$$

[*3] $\frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t}$ と $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}$ は同じ意味で, $x(t)$ を t に関して微分し, 微分した結果に $t = 0$ を代入するという意味である.

を得る．この式を (5.9b) に代入して整理すると

$$y = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta}x^2 + \tan\theta\, x \tag{5.12}$$

を得る．これは $y = ax^2 + bx + c$, (ここで, a, b, c は全て定数) の形をしているので放物線である．特に a に対応する量 $-\frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta}$ が負なので (5.12) は上に凸の放物線である．

物体が放物線の最高点に達する時刻, および最高点の高さを求めてみる．物体の速度は物体が放物線軌道の最高点に達する前は上向き $v_y > 0$, 放物線軌道の最高点に達した後は下向き $v_y < 0$ の速度で運動する．そこで, 放物線軌道の最高点では $v_y = 0$ である．(5.10b) より $v_y = 0$ となる時刻は

$$t = \frac{V_0\sin\theta}{g} \tag{5.13}$$

と求まる．さらに最高点の高さは (5.13) を (5.9b) に代入し

$$y = \frac{V_0^2\sin^2\theta}{2g} \tag{5.14}$$

となる．

物体が初期位置と同じ高さ $y = 0$ に戻ってくる時刻は, (5.9b) より

$$y = \left(-\frac{1}{2}gt + V_0\sin\theta\right)t = 0 \tag{5.15}$$

から $t = 0$ と

$$t = \frac{2V_0\sin\theta}{g} \tag{5.16}$$

である．前者の解（$t = 0$ の解）は初期条件が再び得られたことに対応し, 後者の解 (5.16) がいま求めるものである．この時刻は, 物体が放物線の最高点に達する時刻 (5.13) の 2 倍である．このことは理にかなっている．さらにこの時刻における x 座標, 即ち $y = 0$ が地面だと考えたときの物体の到達距離は

$$\begin{aligned} x &= V_0\cos\theta\left(\frac{2V_0\sin\theta}{g}\right) = \frac{2V_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} \\ &= \frac{V_0^2\sin 2\theta}{g} \end{aligned} \tag{5.17}$$

である．V_0 が一定のもとでこの距離を最大にするには $\sin 2\theta = 1$ となる θ を初期条件として物体を運動させればよい．その値は $2\theta = \pi/2$, 即ち $\theta = \pi/4$, つまり水平面と 45° の角度で物体を打ち出せばよい．

5.3　自由落下

前節の問題と同じ運動方程式に従うが, 初期条件だけが異なる別の運動を考えてみよう.

5.3.1　問題設定

5.2 節と同じ問題設定で, 一様な重力場中を運動する質量 m の質点の運動を考察する. 質点の運動は簡単化のために鉛直 2 次元平面内で起こるとし, デカルト座標系の y 軸は鉛直上向き, y 軸に直角右向きに x 軸をとる. 物体に働く力は重力のみとする.

初期条件が 5.2 節とは異なり, $\boldsymbol{r}(0) = L\boldsymbol{i} + H\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}(0) = 0$ とする. 即ち, 重力の影響のみを受けて, 原点からある水平距離 L, 高さ H のところを出発点にして初速度 0 で落下する物体の運動を考察する. このような問題は**自由落下問題**とも呼ばれている.

5.3.2　運動方程式

物体の運動を記述する運動方程式は, 今の問題設定では (5.1) と同じで, したがってその一般解も同じである:

$$x(t) = C_1 t + C_2, \tag{5.18a}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4. \tag{5.18b}$$

ここで C_1, C_2, C_3, C_4 は任意定数である. 初期条件を考慮して, これらの任意定数を決定すると

$$C_1 = C_3 = 0,\ C_2 = L,\ C_4 = H$$

を得る. 即ち, 初期条件を満足する運動方程式の解は

$$x(t) = L, \tag{5.19a}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H \tag{5.19b}$$

となる. 今の問題設定は, x 方向には第 1 法則が成り立つ場合で, しかも初速度 0 なので, 質点は $x = L$ のところに居続ける. 一方, y 方向には重力の作用を受けて落ちていく.

5.4　モンキーハンティング

これまでに議論してきた放物運動と自由落下を同時に考えてみる.

5.2, 5.3 節と同じ問題設定で, 一様な重力場中を運動する 2 つの質点（質量 m_1 の質点 1 と質量 m_2 の質点 2）の運動を考察する. 質点の運動は簡単化のために鉛直 2 次元平面内で起こるとし, デカルト座標系の y 軸は鉛直上向き, y 軸に直角右向きに x 軸をとる. 物体に働く力は重力のみとする.

初期条件は質点 1 に関しては 5.2 節とおなじ, 質点 2 については 5.3 節と同じとする. ただし,

$$\tan\theta = H/L \tag{5.20}$$

とする.

質点 1 はハンターが打つ弾丸を, 質点 2 はハンターの標的のサルで，ハンターがサルをめがけて弾を打ったと同時に木の上にいたサルが自由落下を始める, というような設定である. 果たして弾をサルに当てるにはどのようにしたらいいであろうか.

初期条件を満足する運動方程式の解[*4]は, これまでの解を参照すると

$$x_1(t) = V_0\cos\theta t, \tag{5.21a}$$

$$y_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\sin\theta t, \tag{5.21b}$$

$$x_2(t) = L, \tag{5.22a}$$

$$y_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H \tag{5.22b}$$

である.

質点 1 と 2 が衝突するためには, 2 つの質点の x 座標が一致する $(x_1 = x_2)$ 必要がある. そこで

$$V_0\cos\theta t = L$$

より質点 1 が L に到達する時刻

$$t = \frac{L}{V_0\cos\theta} \tag{5.23}$$

が求まる. この時刻における質点 1 と 2 の y 座標を求めてみる.

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{L}{V_0\cos\theta}\right)^2 + V_0\sin\theta\left(\frac{L}{V_0\cos\theta}\right) \\ &= -\frac{gL^2}{2V_0^2\cos^2\theta} + L\tan\theta. \end{aligned} \tag{5.24}$$

[*4] 位置ベクトルの成分 x, y に付く下付きの添え字は質点の番号を表す. 例えば x_1, y_1 は質点 1 の位置ベクトルの x, y 成分である.

いっぽう,

$$y_2 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{L}{V_0\cos\theta}\right)^2 + H$$
$$= -\frac{gL^2}{2V_0^2\cos^2\theta} + H. \tag{5.25}$$

ここで (5.20) を考慮すると $y_1 = y_2$ となる．即ち, 質点 1 と 2 は (5.23) の時刻において必ず衝突するのである．

■議論　なぜ衝突するのか．もし重力が働いていなければ[*5], 質点 2 は静止したままで, 質点 1 は 2 に向かう直線軌道をたどるので衝突する．(5.24), (5.25) の右辺第 2 項が一致するのはそのためである．一方, 重力が働いているときには, 質点 1 の軌道は, 重力が働いていないときの軌道 (**慣性軌道**と呼ばれる), 即ち直線軌道, からずれる．そのズレは (5.24) の右辺第 1 項で表される．一方, 質点 2 の慣性軌道, 即ち静止状態, からのズレは (5.25) の右辺第 1 項で表される．この 2 つのズレが一致しているのである．より一般的には, 一様重力場中における慣性軌道のズレは, 初期条件にかかわらず鉛直方向に $-\frac{1}{2}gt^2$ である．つまり鉛直方向の慣性軌道からのズレは, 質点 1, 2 の両方で任意の時刻で同じなのである．

[*5] $g = 0$ と設定して解を眺めてみる．

演習問題[*6]

運動方程式を導入したので, 運動方程式を解いて簡単な物体の運動を考察してみよう. ここでは高等学校の物理基礎で扱った最も簡単な運動を例にとる.

1. 重力加速度の大きさが g で表される一様な重力の作用のみを受けて運動する質量 m の物体 (質点) を考える. この物体の任意の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を以下の設問に従って求めなさい.

   座標系の設定: 鉛直上向きにデカルト座標系の y 軸をとり, y 座標の向かって右向きに x 軸をとる. 物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$, 速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は $\boldsymbol{v}(t) = v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j}$ と表される. ここで, x と y はそれぞれ物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の x, y 方向成分, $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ はそれぞれデカルト座標系の x, y 方向の単位ベクトル, v_x と v_y はそれぞれ速度 $\boldsymbol{v}$ の x, y 方向成分である.

   初期条件: 物体は $t = 0$ において, 高さ H, 即ち $\boldsymbol{r}(0) = H\boldsymbol{j}$, $(x(0) = 0, y(0) = H)$, に存在し, 速度はゼロ, 即ち $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{0}$, $(v_x(0) = 0,\ v_y(0) = 0)$, であったとする.

   (a) 単位質量の物体に働く重力を $\boldsymbol{g}$ と表すことにする. このとき, 物体の運動を支配する運動方程式をベクトル形式で書きなさい. (質量 m と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の時間微分 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$, 重力 $\boldsymbol{g}$ の間に成り立つ関係式を書きくだす.)

   (b) 運動方程式の各成分が満たす式を書きなさい.

   (c) 前節問で得られた方程式を時間 t に関して積分することにより, 速度の x, y 方向成分 $v_x(t)$, $v_y(t)$ を時間の関数として書き下しなさい.

   (d) 前設問で得られた速度の x, y 方向成分を時間 t に関して積分することにより, 物体の位置 $x(t)$, $y(t)$ を t の関数として書き下しなさい.

[*6] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.