

演習問題解答例 (5)

岩山隆寛 *

— 解答例を参考にするときの注意 —

解答例を参考にして宿題の解答を作成するときには、必ず解答例を紙に印刷して、内容をよく理解、確認してから自分の解答を作成するようにしてください。パソコンやスマートフォンの画面で解答例を見た場合に、数式に含まれている文字（アルファベットやギリシャ文字、ベクトルを表す太文字）が適切に表示されないことがあります。

演習問題*1

運動方程式を導入したので、運動方程式を解いて簡単な物体の運動を考察してみよう。ここでは高等学校の物理基礎で扱った最も簡単な運動を例にとる。

1. 水平面上を何の力の作用も受けずに運動する質量 m の物体 (質点) を考える。この物体の任意の時刻 t における位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ と速度 $\mathbf{v}(t)$ を以下の設問に従って求めなさい。

座標系の設定: 水平方向にデカルト座標系の x 軸をとる。物体は水平面上を運動しているので、物体の位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ は $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i}$ 、速度 $\mathbf{v}(t)$ は $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{i}$ と表される。ここで、 x は物体の位置座標 (\mathbf{r} の x 方向成分)、 \mathbf{i} はデカルト座標系の単位ベクトル、 v は速度の x 方向成分である。

初期条件: 物体は、 $t = 0$ において、座標系の原点 $\mathbf{r}(0) = 0$, ($x(0) = 0$), に存在し、速度は $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{i}$, ($v(0) = v_0$), であったとする。

* 福岡大学理学部地球圏科学科. iwayama@fukuka-u.ac.jp

*1 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください。提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので。

- (a) 物体の運動を支配する運動方程式をベクトル形式で書きなさい。(質量 m と速度ベクトルの時間微分 $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ に関する関係式を書きください.)

解答例: 物体には何の力も働いていないので, Newton の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad (1)$$

である.

- (b) 運動方程式の x 成分が満たす式を書きなさい.(質量 m と速度ベクトルの時間微分の x 成分 $\frac{dv_x}{dt}$ に関する関係式を書きください.)

解答例: (1) をデカルト座標系において分解すると,

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (2)$$

である. したがって, 運動方程式の x 成分が満たす式は

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (3)$$

である.

- (c) 前節問で得られた方程式を時間 t に関して積分することにより, 速度の x 方向成分 $v_x(t)$ を時間の関数として書き下しなさい.

解答例: (3) を m で割ると,

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (4)$$

である. この式の両辺を t に関して不定積分する. このとき,

$$\begin{aligned} \int \frac{dv_x}{dt} dt &= 0 \\ \implies v_x(t) &= C_1. \end{aligned} \quad (5)$$

ここで, C_1 は積分定数 (任意定数) である. 上式は $t = 0$ を代入すると, $v_x(0) = C_1$ となる. また初期条件は, $v_x(0) = v_{x0}$ である. したがって $C_1 = v_{x0}$ であり, 任意の時刻 t において質点の速度の x 成分は

$$v_x(t) = v_{x0} \quad (6)$$

である.

- (d) 前設問で得られた速度の x 方向成分を時間 t に関して積分することにより, 物体の位置 $x(t)$ を t の関数として書き下しなさい.

解答例: 位置 x と速度の x 成分 v とは $\frac{dx}{dt} = v$ で与えられることを考慮すると, (6) は

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \quad (7)$$

と書ける. この式の両辺を t に関して不定積分する. このとき,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{dt} dt &= \int v_0 dt \\ \Rightarrow x(t) &= v_0 t + C_2. \end{aligned} \quad (8)$$

ここで, C_2 は積分定数 (任意定数) である. 上式は $t = 0$ を代入すると, $x(0) = C_2$ となる. また初期条件は, $x(0) = 0$ である. したがって $C_2 = 0$ であり, 任意の時刻 t において質点の位置 x は

$$x(t) = v_0 t \quad (9)$$

である.

—— 今回の宿題のポイント ——

1. (9) は等速直線運動する物体の位置を表す公式として, 高等学校の物理基礎の教科書に掲載されている式である.
2. 運動方程式を利用して物体の運動の状態, 任意の時刻における速度と位置ベクトル, を決定する例を示しました.
3. 運動方程式を積分すると, 積分定数が現れるので, それを決定するために初期条件が使用されました.
4. このような議論の仕方は, 他の例, 重力の作用のもとで運動する物体, ばねの弾性力を受けて運動する物体, 万有引力を受けて運動する物体でも全く同様です.