第 4 章

Newton の運動の法則

観測事実, 実験事実などから物体の運動に関してこの章で紹介する三つの法則が成り立っていることが知られており, それらが力学の法則の中で最も基本的なものと考えられている.

4.1 Newton の第 1 法則

Newton の第 1 法則

物体に外部から力が働かなければ, 物体は静止し続けるか, または一直線上を一定の速度で運動し続ける.

物体が持っている静止し続ける, もしくは一定の速度で運動し続ける性質を**慣性**と呼ぶ. 第 1 法則は**「慣性の法則」**とも呼ばれる.

速度はベクトル量であるので, 一定の速度とは速度の大きさも向きも時間とともに変化しないことを意味する. 例えば, 一定の速さで円軌道を描いて運動 (等速円運動) する物体の速度は時間とともに向きが変わっているので, この場合は速度は時間とともに変化している.（前章の 3.4 節参照.） したがって, 一定の速さで円軌道を描いて運動している物体には外力が働いているのである.

4.2 Newton の第 2 法則

Newton の第 2 法則

物体に外部から力が働くと速度が変化し（加速度が生じ）, 物体の加速度は力に比例する.

Newton の第 2 法則を具体的に数式で書き表すと

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \tag{4.1}$$

となる．ここで, $\boldsymbol{a}$ は加速度, $\boldsymbol{F}$ は力である．比例定数にあたる m は物体の質量になる．なお, 物体の加速度 $\boldsymbol{a}$ は速度 $\boldsymbol{v}$ の時間変化率なので, (4.1) は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{4.2}$$

とも書かれる．さらに, 速度 $\boldsymbol{v}$ は位置 $\boldsymbol{r}$ の変化率なので (4.2) は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \tag{4.3}$$

とも書かれる．(4.1)–(4.3) は運動方程式と呼ばれる．

上で述べた Newton の第 2 法則（およびその数学的表現 (4.1)–(4.3)）は質量 m が時間に依存しない場合に正しい．質量が時間に依存する場合にも正しい法則は次のようになる:

Newton の第 2 法則 (一般の場合)

物体に外部から力が働くと物体の運動量が変化し, 物体の運動量の時間変化率は物体に働く力に等しい．

運動量は質量と速度の積

$$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v} \tag{4.4}$$

で定義される量であり*1, 上の Newton の第 2 法則を具体的に数式で書き表すと

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}, \tag{4.5}$$

となる．運動量の定義を (4.5) に代入して整理すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= \boldsymbol{F}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

つまり, $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$ ならば, (4.6) は (4.3) に帰着される．

この講義では質量が変化するような場合を扱わない．そこで, 先の表現の第 2 法則で十分である．質量が変化するような場合としては, 燃料を消費しながら飛ぶロケットの運動や, 速度が光速に近い場合の物体の運動が挙げられる．

*1 運動量は物体の持つ運動の激しさや勢い, 物体が衝突したときの衝撃の大きさを表す一つの指標である．

■第 1 法則と第 2 法則の関係　:

第 1 法則は第 2 法則から導くことができる．(4.2) において $\boldsymbol{F}=0$ とすると, $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0$ となる．一般に物体の質量はゼロではない ($m\neq 0$) ので, $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0$ は $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0$ を意味する．これは速度が時間に依存しない定数（大きさと向きが時間によって変化しないベクトル）かゼロであることを意味する．即ち, 物体に力が働いていなければ, 物体は一定の速度で運動し続けるか, 静止しているかのいずれかであり, 第 1 法則は第 2 法則から導かれることになる．

■質量の意味について　:

質量がそれぞれ m_1, m_2 ($m_1>m_2$) である二つの質点 1 と 2 を考える．これらの質点に同じ力 $\boldsymbol{F}$ が作用して運動しているとする．このとき, 質点 1 と質点 2 の加速度をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ としたとき, 運動方程式より $m_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}$,（$i=1,2$）なので, $\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}/m_i$ を得る．仮定 $m_1>m_2$ より, $|a_2|>|a_1|$ が導かれる．つまり, 質量の大きな物体 (今の場合, 質点 1) ほど加速されにくい．このことにより質量の大きさは加速のされ難さの程度（静止状態や一定速度の運動の状態の変え難さ, 即ち, 慣性の大きさ）を表すものと解釈することができる．

■次元と単位　:

物理学に現れる量（物理量と呼ばれる）には（ほとんど必ず）次元と呼ばれるものを持っている．もしくは次元とは物理量に備わった性質である．力学における基本的な次元は長さ, 質量, 時間でそれぞれを記号で L，M，T と表す．その他の物理量の次元はこれら 3 つから導ける．速度 $\boldsymbol{v}$ の次元をしばしば括弧を使って $[v]$ と書く．このとき $[v]$ は基本的な次元を使うと $[v]=\mathrm{L/T}$ であるし, 加速度 $\boldsymbol{a}$ の次元 $[a]$ は $[a]=\mathrm{L/T^2}$, 力 $\boldsymbol{F}$ の次元 $[F]$ は $[F]=\mathrm{ML/T^2}$ である．

方程式中の各項の次元は必ず等しくなければならない．さらに次元の等しいものどうししか足したり引いたりすることができない．また方程式の両辺の次元も一致していなければならない．

長さ, 時間, 質量の大きさを数値で表すときに用いられる単位にはいくつかのものがあり, 近年では MKS 単位系（もしくは SI 単位系）と呼ばれるものが標準的に採用されている．これは長さ, 質量, 時間をメートル (m), キログラム (kg), 秒 (s) で表す単位系である．MKS 単位系では力の単位は**ニュートン**と呼ばれ N で表され, $\mathrm{N}=\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ である．つまり, 1 N とは運動している 1 kg の物体の速さを 1 秒間に 1 m/s だけ加速させるのに必要な力である．

4.3　Newton の第 3 法則

Newton の第 3 法則

二つの物体が互いに力を及ぼしあう場合, 物体 1 が物体 2 に及ぼす力 $\boldsymbol{F}_{12}$ は, 物体 2 が物体 1 に及ぼす力 $\boldsymbol{F}_{21}$ と大きさは同じであるが向きは反対である.

この法則は「**作用・反作用の法則**」と呼ばれている.

演習問題[*2]

運動方程式を導入したので, 運動方程式を解いて簡単な物体の運動を考察してみよう. ここでは高等学校の物理基礎で扱った最も簡単な運動を例にとる.

1. 水平面上を何の力の作用も受けずに運動する質量 m の物体 (質点) を考える. この物体の任意の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を以下の設問に従って求めなさい.

   座標系の設定: 水平方向にデカルト座標系の x 軸をとる. 物体は水平面上を運動しているので, 物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i}$, 速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は $\boldsymbol{v}(t) = v(t)\boldsymbol{i}$ と表される. ここで, x は物体の位置座標 ($\boldsymbol{r}$ の x 方向成分), $\boldsymbol{i}$ はデカルト座標系の単位ベクトル, v は速度の x 方向成分である.

   初期条件: 物体は, $t = 0$ において, 座標系の原点 $\boldsymbol{r}(0) = 0$, $(x(0) = 0)$, に存在し, 速度は $\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{i}$, $(v(0) = v_0)$, であったとする.

   (a) 物体の運動を支配する運動方程式をベクトル形式で書きなさい. (質量 m と速度ベクトルの時間微分 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ に関する関係式を書きくだす.)

   (b) 運動方程式の x 成分が満たす式を書きなさい.(質量 m と速度ベクトルの時間微分の x 成分 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ に関する関係式を書きくだす.)

   (c) 前節問で得られた運動方程式を時間 t に関して積分することにより, 速度の x 方向成分 $v(t)$ を時間の関数として書き下しなさい.

   (d) 前設問で得られた速度の x 方向成分を時間 t に関して積分することにより, 物体の位置 $x(t)$ を t の関数として書き下しなさい.

[*2] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.