# 演習問題解答例 (4)

岩山隆寛 *

解答例を参考にするときの注意

解答例を参考にして宿題の解答を作成するときには, **必ず 解答例を紙に印刷**して, 内容をよく理解, 確認してから自分の解答を作成するようにしてください. パソコンやスマートフォーンの画面で解答例を見た場合に, 数式に含まれている文字（アルファベットやギリシャ文字, ベクトルを表す太文字）が適切に表示されないことがあります.

## 演習問題[*1]

高等学校の物理基礎の教科書に掲載されている物体の位置と速度を表す公式[*2]が, この章で議論したことと矛盾がないことを示してみよう.

**注意 1**: ここで掲載する公式を覚えておく必要は全くない. 公式とこの章の議論とに矛盾がないことを確認すること, および, 計算練習をすることがこの演習問題の目的である.

**注意 2**: 以下の公式で速度, 加速度と参照しているものは, それぞれベクトルとしての速度 $\boldsymbol{v}$, 加速度 $\boldsymbol{a}$ のある座標の成分であり, 位置と呼んでいるものも位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ のある座標の成分である. また, 以下の公式では初期時刻 ($t = 0$) において物体は原点にあると暗黙に仮定されている. 問題を解くにあたり, 先ず自分で座標系を設定しましょう.

---

* 福岡大学理学部地球圏科学科. iwayama@fukuka-u.ac.jp

*1 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

*2 植松恒夫 他, 物理基礎 改訂版, 2016 年, p.36

1. 等速直線運動：一直線上を一定の速さ $v$ で進む物体の位置 $x$ は

$$x = vt \tag{1}$$

である.

解答例: 水平方向に $x$ 軸を取り, $x$ 軸上を物体が運動するとする. このとき, 問題は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$, 速度 $\boldsymbol{v}$, 加速度 $\boldsymbol{a}$ がそれぞれ

$$\begin{align} \boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} = vt\,\boldsymbol{i}, \tag{2}\\ \boldsymbol{v} &= v\boldsymbol{i}, \tag{3}\\ \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{0}, \tag{4} \end{align}$$

と表せることを述べている. ここで, $\boldsymbol{i}$ は $x$ 方向の単位ベクトルである. 等速直線運動では加速度はゼロであることに注意しておく.

位置ベクトルを $t$ に関して微分すると

$$\begin{align} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(vt)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}, \nonumber\\ &= v\boldsymbol{i} \nonumber\\ &= \boldsymbol{v} \tag{5} \end{align}$$

を得る. さらに速度を $t$ に関して微分すると

$$\begin{align} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}, \nonumber\\ &= \boldsymbol{0} \nonumber\\ &= \boldsymbol{a} \tag{6} \end{align}$$

を得る. 即ち, 位置ベクトルの時間 $t$ に関する微分が速度で, 速度の時間 $t$ に関する微分が加速度であることが確かめられた.

2. 等加速度直線運動：一直線上を初速度 $v_0$ で一定の加速度 $a$ で進む物体の速度 $v$ と位置 $x$ は

$$\begin{align} v &= v_0 + at \tag{7}\\ x &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{8} \end{align}$$

である.

解答例:　水平方向に $x$ 軸をとる．このとき, 問題は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$, 速度 $\boldsymbol{v}$, 加速度 $\boldsymbol{a}$ がそれぞれ

$$\boldsymbol{r} = \left(v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right)\boldsymbol{i}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{v} = (v_0 + at)\,\boldsymbol{i}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{i}, \tag{11}$$

と表せることを述べている．ここで, $\boldsymbol{i}$ は $x$ 方向の単位ベクトルである．

位置ベクトルを $t$ に関して微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right)\right\}\boldsymbol{i}, \\ &= (v_0 + at)\,\boldsymbol{i} \\ &= \boldsymbol{v}\end{aligned} \tag{12}$$

を得る．さらに速度を $t$ に関して微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_0 + at)\,\boldsymbol{i}, \\ &= a\boldsymbol{i} \\ &= \boldsymbol{a}\end{aligned} \tag{13}$$

を得る．即ち, 位置ベクトルの時間 $t$ に関する微分が速度で, 速度の時間 $t$ に関する微分が加速度であることが確かめられた．

3. 鉛直投げ上げ運動（上向き正）: 重力だけが働く環境で, 初速度 $v_0$ で投げ上げた物体の速度 $v$ と位置 $y$ は

$$v = v_0 - gt \tag{14}$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{15}$$

である．ここで, $g$ は重力加速度である．

解答例:　鉛直上向きに $y$ 軸をとる．このとき, 問題は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$, 速度 $\boldsymbol{v}$, 加速度 $\boldsymbol{a}$ がそれぞれ

$$\boldsymbol{r} = \left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{v} = (v_0 - gt)\,\boldsymbol{j}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{j}, \tag{18}$$

と表せることを述べている．ここで, $\boldsymbol{j}$ は $y$ 方向の単位ベクトルである．

位置ベクトルを $t$ に関して微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \right\} \boldsymbol{j}, \\
&= (v_0 - gt)\, \boldsymbol{j} \\
&= \boldsymbol{v}
\end{aligned} \tag{19}
$$

を得る．さらに速度を $t$ に関して微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (v_0 - gt)\, \boldsymbol{j}, \\
&= -g\boldsymbol{j} \\
&= \boldsymbol{a}
\end{aligned} \tag{20}
$$

を得る．即ち, 位置ベクトルの時間 $t$ に関する微分が速度で, 速度の時間 $t$ に関する微分が加速度であることが確かめられた．

今回の宿題のポイント

1. 位置ベクトルを時間に関して微分すると速度になり, 速度を時間に関して微分すると加速度になることをいくつかの例で実際に確かめました．
2. 微分と積分は逆の演算なので, 加速度を時間に関して積分すると速度になり, 速度を時間に関して積分すると位置ベクトルになることが類推できると思います．ただし, 積分を行ったときには一般に積分定数が出てきます．それらは, 初速度であったり初期位置が与えられると決定できます．