第 3 章

ベクトルの微分

前節で解説したベクトルについて, その微分を定義し, さらに速度と加速度を導入する.

3.1 微分の復習

実数 t を独立変数とするある関数を $f(t)$ とする.*1 $f(t)$ の t に関する微分とは以下のように定義される量である: t における f の値 $f(t)$ と $t+\Delta t$ における f の値 $f(t+\Delta t)$ との差

$$f(t+\Delta t)-f(t) \tag{3.1}$$

を独立変数の間隔 Δt で割り

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{3.2}$$

さらに $\Delta t \to 0$ という極限を取ったもの

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{3.3}$$

は $f(t)$ の t に関する微分と呼び, $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ と書く. 即ち,

*1 物理的な例としては t を時間, 力学の例ではないが, 時間に依存する身近なスカラー量 f としては温度がある. 以降しばしば t を断りなしに時間と呼ぶことがある. 物理学では標準的な表記法として時間を t と書き表す.

スカラー量（スカラー関数）の微分の定義

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{3.4}$$

である．(3.4) における $\equiv$ は「定義」を意味する．[*2] $f(t)$ の t 依存性をしばしば省略して，$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ を

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \tag{3.5}$$

と書くこともある．$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ という記号は，この記号に引き続く 関数を t に関して微分するという意味である．$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ と $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f$ は同じ意味である．

(3.1) は時間間隔 Δt における f の変化量を表している．[*3] さらに，(3.2) は Δt の間の f の平均的な変化率 を表している．さらに $\Delta t \to 0$ の極限を取ることで，時刻 t における f の瞬間的な変化率を表してる．[*4]

微分の意味としてしばしば曲線の傾きである，という言い方をする．もちろん幾何学的な解釈としてこのことは正しい．別の解釈としてもっと単純に (3.4) を参照すると「**微分とは引き算**である」ともいえる．計算機を用いて微分を計算する際には $\Delta t \to 0$ という極限が計算機ではとれないので，しばしば微分を

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{3.6}$$

等と引き算で近似してしまう．(3.6) は微分の差分近似と呼ばれている．

(3.4) を見るとわかるように $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ も一般に t の関数になっている．要するに，f の瞬間的な変化率は一般に時々刻々変化しているので，t の関数になっているのである．$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ は t の関数なので，それをさらに微分することができる：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$．これは f の t に関する 2 階微分と呼ばれる．$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$ は $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ とも書かれる．

3.2　ベクトルの微分

スカラーの微分と同様にベクトルの微分も次のように定義する．実数 t を独立変数とするあるベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ の微分は

[*2] 高校では合同を意味する記号として使用したが，大学では定義を示す記号として用いられる．

[*3] 変化量をしばしば記号で Δ (大文字のデルタ．アルファベットの D に対応する文字) と表す．即ち，f の変化量は Δf と表す．このような記号を用いると，(3.2) は $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ と書け，さらに (3.4) ではこの Δ という記号は $\Delta t \to 0$ の極限を取ると，d という記号に置き換わっている．

[*4] f を温度と考えると，$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ は時刻 t における瞬間的な温度の変化率である．

ベクトルの微分

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t} \tag{3.7}$$

と定義される．ベクトルの微分はベクトルであることを注意しておく.[*5] さらに, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ は (3.7) を参照すると引き続き t の関数になっていることがわかる．$\boldsymbol{A}$ が t に依存するとは, $\boldsymbol{A}$ の大きさも向きも t が変化するとともに変わっていくことを意味し, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ が t に依存しているということは $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ の大きさも向きも t が変化するとともに変わっていくことを意味する．

ベクトル $\boldsymbol{A}$ を分解してデカルト座標系の成分と単位ベクトルで表現したとき, その微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + A_x\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + A_y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} + A_z\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

となる．第 1 式から第 2 式への変形は, 微分の連鎖律 (14) によって成分の微分だけでなく単位ベクトルの微分も行わないといけない．ただし, デカルト座標系の座標軸の向きは時間に依存せず, 常に同じ方向を向いているので, 従ってデカルト座標系の単位ベクトルは時間に依存しない[*6]．つまり $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = 0$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} = 0$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = 0$ である．あるベクトルの微分をデカルト座標系で分解すると, 単にそのベクトルの成分を微分したものを成分として持つベクトルになるのである．

極座標系や円筒座標系の場合には単位ベクトルが時間と共に方向を変えるので, 単位ベクトルの時間微分はゼロではない．このことは, 後の章で 2 次元極座標系を用いて質点の運動を調べる（単振り子や惑星の運動を調べる）ときに述べることにする．

3.3　変位, 速度, 加速度

時刻 t において, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ で表される点 P にあった質点が, Δt 時間後に位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ で表わされる点 Q に移動したとする (図 3.1 参照). Δt の間の平均的な質点の速度は, 向きは P から Q に向かい, 大きさは PQ 間の長さを Δt で割ったもので

[*5] ベクトルの差 $\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)$ はベクトルであり, それをスカラ量 Δt で割ってもベクトルになっている．

[*6] 単位ベクトルの大きさは, 単位ベクトルの定義から 1 であるので単位ベクトルの大きさは時間に依存しない．さらに, 座標軸の向きが変わらないので単位ベクトルの方向も時間に依存しない

ある．P から Q に向う向きを持ち, PQ 間の長さを持つベクトル, 即ち, P を始点, Q を終点とするベクトルは, P と Q の位置ベクトルを使って, $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$ と表せる.*7 そこで Δt の間の平均的な質点の速度は,

$$\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{3.9}$$

となる．さらに, (3.9) において, $\Delta t \to 0$ の極限を取るとそれは時刻 t における質点の瞬間的な速度 $\boldsymbol{v}(t)$ になる．つまり

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

は時刻 t における質点の瞬間的な速度で, したがって速度は微分を用いて

位置ベクトルと速度との関係

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.10}$$

となる．$\boldsymbol{v}(t)$ はしばしば $\boldsymbol{v}$ と書かれる．速度 $\boldsymbol{v}$ はベクトルであることを注意しておく．

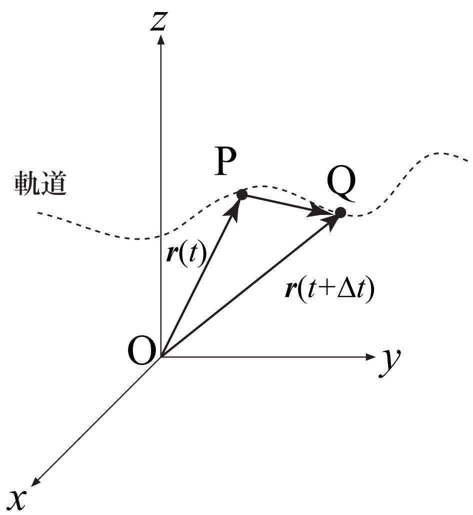

図 3.1　速度の説明図．ある時刻 t に点 P にあった質点が, 時刻 $t+\Delta t$ に点 Q に移動したとする．破線は質点の軌道を表し, 点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ と表すと, 点 Q の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ である．

$\boldsymbol{v}$ は引き続き t の関数になっていて, 質点の位置と同様に時間とともに $\boldsymbol{v}$ の方向と大きさは変わっていく．時刻 t における瞬間的な速度の変化率, 加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ は, 位置ベクトルから速度を導いたときと同様の議論によって

*7 位置ベクトルの変化を**変位**と呼び, しばしば $\Delta\boldsymbol{r}$ と表す: $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$.

速度と加速度の関係

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.11}$$

となる．速度 $\boldsymbol{v}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の間の関係を使うと

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{3.12}$$

と書ける．$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ の記号の意味は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tag{3.13}$$

と時間微分を2回作用させることを意味する．(3.12) は,「加速度は位置ベクトルの時間による2階微分で与えられる」, と表現される．速度と同様に加速度もベクトルであることを注意しておく．

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{3.14}$$

のようにデカルト座標系で分解したときの, 速度と加速度の分解は次のようになる：先ず, 速度 $\boldsymbol{v}$ の x, y, z 成分をそれぞれ v_x, v_y, v_z と表すと,

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

である．一方, 速度は位置ベクトルの時間微分なので,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

である．ここで, デカルト座標系の単位ベクトルは時間に依存しないことを用いている．したがって速度の各成分は

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{3.15a}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \tag{3.15b}$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \tag{3.15c}$$

と表せる．同様に加速度 $\boldsymbol{a}$ の x, y, z 成分をそれぞれ a_x, a_y, a_z と表すと,

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

である．一方, 加速度は速度の時間微分なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

である．ここで, 再びデカルト座標系の単位ベクトルは時間に依存しないことを用いている．したがって, $\boldsymbol{a}$ の各成分は

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \tag{3.16a}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \tag{3.16b}$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}. \tag{3.16c}$$

と表せる．さらに (3.15) を用いると

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \tag{3.17a}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, \tag{3.17b}$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}, \tag{3.17c}$$

である．

3.4　例

2 次元平面内を一定の半径 A を保ち, 一定の角速度 ω で円軌道を描いて運動する質点の位置ベクトルは,

$$\boldsymbol{r} = A\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + A\sin\omega t\,\boldsymbol{j} \tag{3.18}$$

で与えられる．このとき, 質点の速度 $\boldsymbol{v}$ と加速度 $\boldsymbol{a}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + A\sin\omega t\,\boldsymbol{j}\right) \\
&= \left(-\omega A\sin\omega t\right)\boldsymbol{i} + \left(\omega A\cos\omega t\right)\boldsymbol{j}, \qquad (3.19) \\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(-\omega A\sin\omega t\right)\boldsymbol{i} + \left(\omega A\cos\omega t\right)\boldsymbol{j}\right\} \\
&= \left(-\omega^2 A\cos\omega t\right)\boldsymbol{i} + \left(-\omega^2 A\sin\omega t\right)\boldsymbol{j} \\
&= -\omega^2\left(A\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + A\sin\omega t\,\boldsymbol{j}\right) \\
&= -\omega^2\boldsymbol{r} \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

となる．(3.20) は, 加速度の向きが位置ベクトルの向きと逆であることを示している．

演習問題[*8]

高等学校の物理基礎の教科書に掲載されている物体の位置と速度を表す公式[*9]が, この章で議論したことと矛盾がないことを示してみよう.

注意 1:　ここで掲載する公式を覚えておく必要は全くない. 公式とこの章の議論とに矛盾がないことを確認すること, および, 計算練習をすることがこの演習問題の目的である.

注意 2:　以下の公式で速度と参照しているものは, ベクトルとしての速度 $\boldsymbol{v}$ のある座標の成分であり, 位置と呼んでいるものも位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ のある座標の成分である. また, 以下の公式では初期時刻 $(t = 0)$ において物体は原点にあると暗黙に仮定されている. 問題を解くにあたり, 先ず自分で座標系を設定しましょう.

1. 等速直線運動：一直線上を一定の速さ v で進む物体の位置 x は
$$x = vt \tag{3.21}$$
である.
2. 等加速度直線運動：一直線上を初速度 v_0 で一定の加速度 a で進む物体の速度 v と位置 x は
$$v = v_0 + at \tag{3.22}$$
$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{3.23}$$
である.
3. 鉛直投げ上げ運動（上向き正）：重力だけが働く環境で, 初速度 v_0 で投げ上げた物体の速度 v と位置 y は
$$v = v_0 - gt \tag{3.24}$$
$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.25}$$
である. ここで, g は重力加速度である.

[*8] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

[*9] 植松恒夫 他, 物理基礎 改訂版, 2016 年, p.36 より抜粋.