演習問題解答例 (3)

岩山隆寛 *

演習問題*1

1. ベクトル表記の練習をしましょう．アルファベッドの大文字, 小文字, 合わせて 52 文字をベクトル表記しなさい．要するに, 太文字で書いてみる．幼稚に思うかもしれませんが, 文字 (ひらがな, カタカナ, 漢字, アルファベット) を習ったときに沢山練習をしたと思います．練習しないと文字は書けません．ベクトルを書けない人が例年極めて多いので, あえて練習問題にしました．太文字に見えるように自分なり工夫してみましょう．

   解答例: R. P. Feynmann 他, 「ファインマン物理学 III」, 1969 年, 岩波書店, p.15.）参照.

2. 東に向かって流速 6 km/h で水が流れている川を, 船首を真北に向けて水に対する相対速度 8 km/h で進む船の速さを岸からみるといくらになるか．またその進行方向はどうなるか．

   ヒント: 速度は大きさと方向を持つベクトルなので, ベクトルの足し算を行う．ベクトルの大きさが速さであり, 方向は x 座標と船の速度を表すベクトルとの間の角度もしくは角度の tan で答えてみましょう.*2 座標系は岸に固定した座標系で, 東向きに x 軸, 北向きに y 軸をとる．この場合は 2 次元で問題を考える（高さ方向, z 方向, は考えない）．そこで, 例えば, 川の水の速度は $\boldsymbol{v}_{\mathrm{river}} = 6\boldsymbol{i}$ と表される．ここで, $\boldsymbol{i}$ は x 方向の単位ベクトルである．

* 福岡大学理学部地球圏科学科．iwayama@fukuka-u.ac.jp

*1 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください．提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

*2 もちろん, y 座標と船の速度を表すベクトルとの間の角度の tan でもよい．方角をどう表すかを自分で設定すればよい．教科書 (p.5 [問]) では y 座標と船の速度を表すベクトルとの間の角度の tan で答えている．

解答例：　　川岸に対する船の速度を $\boldsymbol{v}_{\mathrm{ship}}$, 川の水に対する船の速度を $\boldsymbol{u}_{\mathrm{ship}}$, 川岸に対する川の水の速度を $\boldsymbol{v}_{\mathrm{river}}$ とする (図 1 参照). 座標系は岸に固定した 2 次元のデカルト座標系を採用し, 東向きに x 軸, 北向きに y 軸をとる. このとき,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\mathrm{river}} &= 6\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{ship}} &= 8\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{v}_{\mathrm{ship}} &= \boldsymbol{v}_{\mathrm{river}} + \boldsymbol{u}_{\mathrm{ship}}\\ &= 6\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

と表される. ここで, $\boldsymbol{j}$ は y 方向の単位ベクトルである. 従って, 川岸に対する船の速さは

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}_{\mathrm{ship}}| &= \sqrt{6^2 + 8^2}\\ &= 10\ [\mathrm{km/h}] \qquad (1)\end{aligned}$$

であり, 川の下流 (x 軸の正の方向) に対する船の方向は, $\tan\theta = \frac{4}{3}$ もしくは, $\theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$ である.[*3]

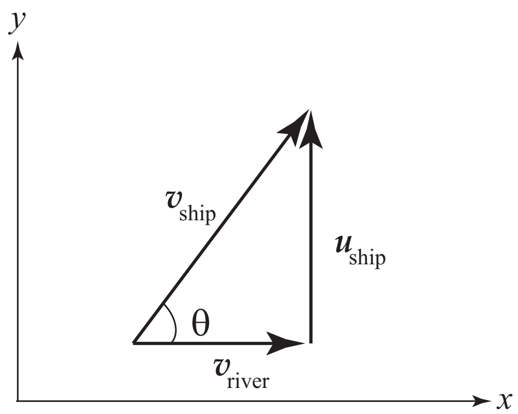

図 1　川の水の速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{river}}$, 川の水に相対的な船の速度 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{ship}}$, および, 岸に相対的な船の速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{ship}}$ の間の関係.

[*3] $\tan^{-1}\alpha$ は $(\tan\alpha)^{-1}$ の意味ではなく, $\tan^{-1}$ でひとまとまりで意味を持ち, tan の逆関数の意味する. しばしば arctan とも書かれる. つまり, $\tan^{-1}\alpha = \arctan\alpha$ である.
$\tan^{-1}\frac{4}{3}$ とは 正接（タンジェント）が $\frac{4}{3}$ となるような角度のことである.

3. m をスカラー, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{F}$ は共にベクトルで, それぞれデカルト座標系で

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{F} &= F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

と分解されるとする．ここで, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトルである．もし, m, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{F}$ が

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{2}$$

の関係式を満たすとき, 各成分が満たす方程式を答えなさい．

解答例: (2) の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{F}$ をデカルト座標系を用いて分解した形で書き下すと, (2) は

$$\begin{aligned}& m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}\\ \Longrightarrow \quad & ma_x\boldsymbol{i} + ma_y\boldsymbol{j} + ma_z\boldsymbol{k} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

そこで (2) の x, y, z 成分が満たす式はそれぞれ,

$$\begin{aligned}x\ \text{成分}: &\quad ma_x = F_x,\\ y\ \text{成分}: &\quad ma_y = F_y,\\ z\ \text{成分}: &\quad ma_z = F_z,\end{aligned}$$

である．

今回の宿題のポイント

1. ベクトル記号は手書きで書けるように練習しましょう．また, これと関連してベクトルとスカラーの記号の区別をきちちんとつけましょう．
2. ベクトルを成分を用いて書くときには,

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} \tag{3}$$

のように単位ベクトルまで付して書きましょう．

$$\boldsymbol{A} = (A_x,\, A_y,\, A_z) \tag{4}$$

とは書かないようにしましょう．