第 2 章

ベクトル

物理学の法則は, しばしはベクトルを用いて表現される. ベクトルを用いた表現は**ベクトル形式**とも呼ばれる. ベクトルは採用する座標系に依存しない量なので, ベクトル形式で書かれた物理法則も座標系に依存しないものである.

ここではベクトルの表記法と計算法について述べておく.

2.1 スカラーとベクトル

長さ, 時間, 質量のような物理学における様々な量を特徴づけるには, 単位[*1]は別にして単一の実数が必要である. そのような量は**スカラー**（もしくはスカラー量）と呼ばれ, その実数はその量の大きさと呼ばれる. スカラーは記号で A, B, C, a, b, c などと書く.

いっぽう, 速度のような量を特徴づけるには, 大きさの他に方向も必要である. そのような量は**ベクトル**（ベクトル量）と呼ばれる. ベクトルは幾何学的には点 P と点 Q を結ぶ矢印 PQ で表され (図 2.1 参照), このとき P はベクトルの**始点**, Q はベクトルの**終点**と呼ばれる. ベクトルは記号で太文字を使用して $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ などと書く. $\boldsymbol{A}$ の大きさ $|\boldsymbol{A}|$ は A と書かれる. 即ち, $|\boldsymbol{A}| = A$ である.

ベクトルの表記法についての注意 (その 1)

ベクトルを表すときには, 高校では例えば $\vec{A}$ のように記号の上に矢印を付けて表した. 本講義や大学で使用する多くの教科書では上付きの矢印ではなく, $\boldsymbol{A}$ のように太文字を使う. この表記法に早く慣れてほしい. もちろん, A のように上付きの矢印も太文字にもなっていない記号はベクトルではないことに注意しておく.

[*1] 長さ, 時間, 質量の単位としてはメートル [m], 秒 [s], キログラム [kg] を用いる. このような単位系は SI 単位系と呼ばれる.

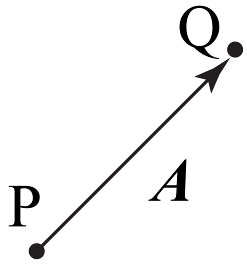

図 2.1　始点 P と終点 Q を結ぶベクトル $\boldsymbol{A}$.

2.2　ベクトルの代数

スカラーもしくは実数の足し算, 引き算, 掛け算はベクトルにも拡張することができる. ここでは足し算と引き算のみを解説しておく. ベクトルどうしの掛け算はあとの章で解説する.

1. 始点に関係なく, 互いに平行で大きさの等しい二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は等しい : $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ (図 2.2 参照).

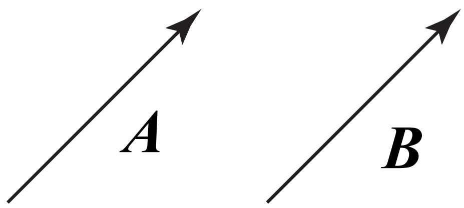

図 2.2　互いに平行で大きさの等しい二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$.

2. ベクトル $\boldsymbol{A}$ と同じ大きさを持ち, 逆方向を向くベクトルは $-\boldsymbol{A}$ と表される (図 2.3 参照).

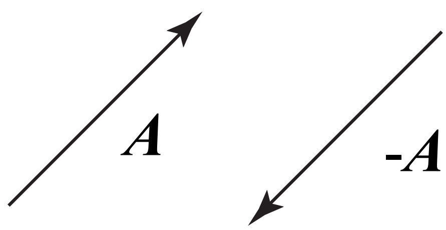

図 2.3　$\boldsymbol{A}$ と $-\boldsymbol{A}$.

3. 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の和を $\boldsymbol{C}$ とすると, $\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{A}$ の終点に $\boldsymbol{B}$ の始点を合わせ

たときの, $\boldsymbol{A}$ の始点と $\boldsymbol{B}$ の終点を結ぶベクトルで作られる．これは, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の始点合わせたとき, これら 2 つのベクトルで作られる平行四辺形の対角線である[*2](図 2.4 参照).

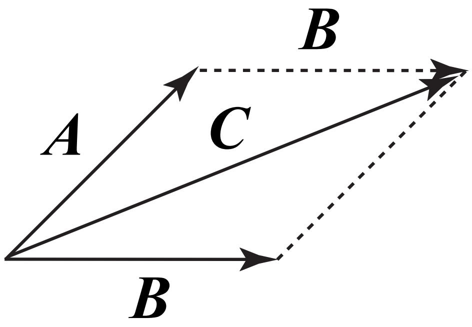

図 2.4　ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

4. ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ との差 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ ベクトルに $-\boldsymbol{B}$ ベクトルを足したものである．即ち, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$ である．これは $\boldsymbol{B}$ ベクトルの終点から $\boldsymbol{A}$ の終点に向かうベクトルに等しい (図 2.5 参照).

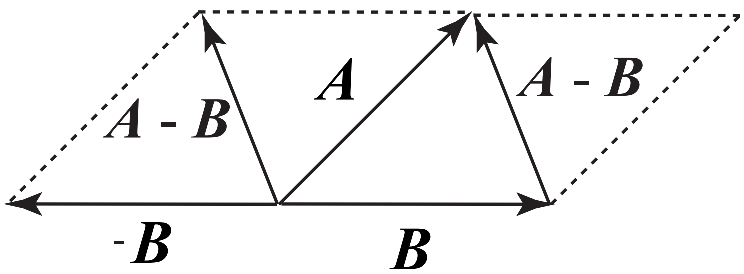

図 2.5　ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の差 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

5. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ ならば, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ はゼロベクトルで $\boldsymbol{0}$ と表される. このベクトルは大きさはゼロで向きは定義できない.
6. ベクトル $\boldsymbol{A}$ とスカラー p との積は, $p\boldsymbol{A}$, もしくは $\boldsymbol{A}p$ と書き, その大きさは pA で向きは $p>0$ のときは $\boldsymbol{A}$ と同じ向き, $p<0$ のときは $\boldsymbol{A}$ と逆向きである．$p=0$ なら $p\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ である.

[*2] 平行四辺形の法則とも呼ばれる.

■ベクトルの代数の法則　$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ がベクトルで, p と q がスカラーとする. このとき以下の法則が成り立つ[*3]:

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$: 和に関する可換則
2. $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$: 和に関する結合則
3. $p(q\boldsymbol{A})=(pq)\boldsymbol{A}$: 積に関する結合則
4. $(p+q)\boldsymbol{A}=p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{A}$: 分配則
5. $p(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=p\boldsymbol{A}+p\boldsymbol{B}$: 分配則

2.3　単位ベクトル

単位の長さ（長さが 1）のベクトルは, **単位ベクトル**と呼ばれる. 長さ $A(>0)$ を持つベクトルを $\boldsymbol{A}$ とする. このとき, $\hat{\boldsymbol{A}}=\frac{\boldsymbol{A}}{A}$ は $\boldsymbol{A}$ と同じ方向を持った単位ベクトルである. 単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{A}}$ と大きさ A を用いてベクトル $\boldsymbol{A}$ を表現すると, $\boldsymbol{A}=A\hat{\boldsymbol{A}}$ である.

デカルト座標系の x, y, z 軸の正の方向を向いた単位ベクトルは互いに直交しており, **直交単位ベクトル**と呼び, 慣例的にそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ と書く (図 2.6 参照).

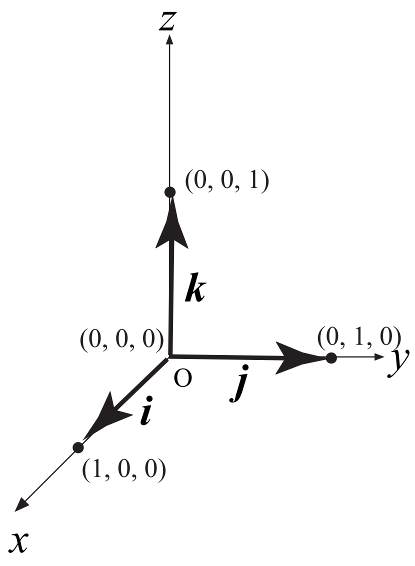

図 2.6　デカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

[*3] 自分で絵を描いて直感的に上記の法則が成り立つことは容易に確かめられるであろうから, 証明は省略する.

2.4　ベクトルの分解

3 次元の任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ はデカルト座標系の原点 O に始点を持つベクトルで表すことができる．O に始点を持つベクトル $\boldsymbol{A}$ の終点の座標を (A_x, A_y, A_z) とする．A_x, A_y, A_z はそれぞれ $\boldsymbol{A}$ の x, y, z **成分**と呼ばれる．さらに，ベクトル $\boldsymbol{A}$ はこれらの成分と単位ベクトルを使って，

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ のデカルト座標系における分解

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_y\boldsymbol{k} \tag{2.1}$$

と書ける．(2.1) は $\boldsymbol{A}$ のデカルト座標系における分解と呼ばれる (図 2.7 参照)．

ベクトルの表記法についての注意 (その 2)

ベクトル $\boldsymbol{A}$ の x, y, z 成分がそれぞれ A_x, A_y, A_z であるとき，高校では $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と表記した．本講義や大学で使用する多くの教科書では単位ベクトルまで付して，

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

と表記する．このような書き方に早く慣れて欲しい．<u>ベクトルを分解するときに単位ベクトルまで含めて書いておく</u>ことは次の章で導入するベクトルの微分の最に重要になってくる．

$\boldsymbol{A}$ の大きさはピタゴラスの定理より

$$A = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{2.2}$$

である．ベクトル $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ の和は，

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} + (A_z + B_z)\boldsymbol{k} \tag{2.3}$$

である．また $\boldsymbol{A}$ のスカラー倍は

$$p\boldsymbol{A} = pA_x\boldsymbol{i} + pA_y\boldsymbol{j} + pA_z\boldsymbol{k} \tag{2.4}$$

である．もし，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ ならば，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の各成分が等しい．つまり，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \\ &\Longrightarrow A_x = B_x,\ A_y = B_y,\ A_z = B_z. \end{aligned} \tag{2.5}$$

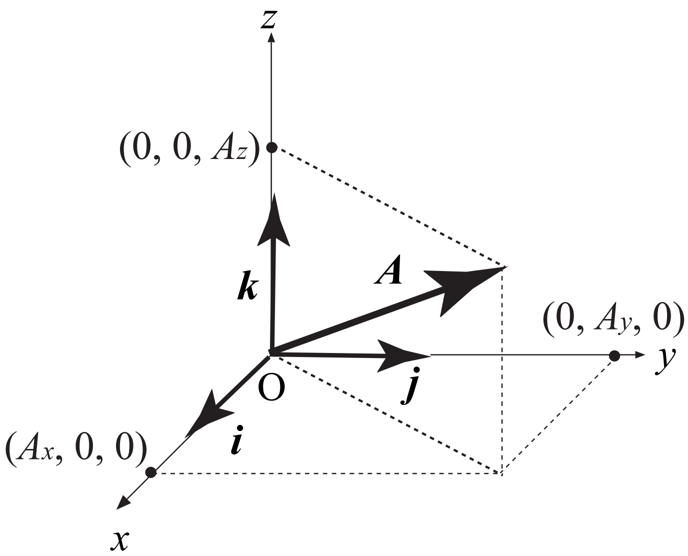

図 2.7　$\boldsymbol{A}$ のデカルト座標系における分解．$\boldsymbol{A}$ の x, y, z 成分はそれぞれ A_x, A_y, A_z である．

2.5　位置ベクトル

質点の力学では, ある力の作用のもとにおける質点の位置 (や速度) を, 任意の時刻において知ることが一つの目的である．前章では, 「質点の位置は座標系を使って表す」, と述べたが, ベクトルを使って表現しておくと非常に便利であることが次の章でわかる．座標系の原点と質点の位置とを結ぶベクトルは**位置ベクトル**と呼ばれ, 慣例的に $\boldsymbol{r}$ と表す．デカルト座標系を採用したときには位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の分解

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{2.6}$$

と書かれる．$\boldsymbol{r}$ は $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ の大きさを持つ．

演習問題[*4]

1. ベクトル表記の練習をしましょう．アルファベッドの大文字, 小文字, 合わせて 52 文字をベクトル表記しなさい．要するに, 太文字で書いてみる．幼稚に思うかもしれませんが, 文字 (ひらがな, カタカナ, 漢字, アルファベット) を習ったときに沢山練習をしたと思います．練習しないと文字は書けません．ベクトルを書けない人が例年極めて多いので, あえて練習問題にしました．太文字に見えるように自分なり工夫してみましょう.(例えば, 図 2.8 参照.)
2. 東に向かって流速 6 km/h で水が流れている川を, 船首を真北に向けて水に対する相対速度 8 km/h で進む船の速さを岸からみるといくらになるか．またその進行方向はどうなるか.

   ヒント:　速度は大きさと方向を持つベクトルなので, ベクトルの足し算を行う．ベクトルの大きさが速さであり, 方向は x 座標と船の速度を表すベクトルとの間の角度もしくは角度の tan で答えてみましょう.[*5] 座標系は岸に固定した座標系で, 東向きに x 軸, 北向きに y 軸をとる．この場合は 2 次元で問題を考える（高さ方向,z 方向, は考えない）．そこで, 例えば, 川の水の速度は $\boldsymbol{v}_{\mathrm{river}} = 6\boldsymbol{i}$ と表される．ここで, $\boldsymbol{i}$ は x 方向の単位ベクトルである.
3. m をスカラー, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{F}$ は共にベクトルで, それぞれデカルト座標系で

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{F} &= F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

   と分解されるとする．ここで, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトルである．もし, m, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{F}$ が

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{2.7}$$

   の関係式を満たすとき, 各成分が満たす方程式を答えなさい.

[*4] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください．提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

[*5] もちろん, y 座標と船の速度を表すベクトルとの間の角度の tan でもよい．方角をどう表すかを自分で設定すればよい．教科書 (p.5 [問]) では y 座標と船の速度を表すベクトルとの間の角度の tan で答えている.