# 演習問題解答例 (2)

岩山隆寛 [*]

## 演習問題[*1]

Euler の公式を用いて, 以下の (1)–(4) を証明しなさい：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \tag{1}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta, \tag{2}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \tag{3}$$

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n. \tag{4}$$

(1),(2) **の証明について**: Euler の公式の便利さを体験するために, 一度自分で手を動かして加法定理を証明しましょう.

**解答例**: まず指数関数の性質を使うと,

$$e^{i\alpha}e^{\pm i\beta} = e^{i(\alpha\pm\beta)} \tag{5}$$

となる. (5) の左辺を Euler の公式を用いて三角算数で書き表すと,

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}e^{\pm i\beta} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin(\pm\beta)) \\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta \pm i\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta \pm i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\ &= \{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\} + i\{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\} \end{aligned} \tag{6}$$

と変形できる. 一方, (5) の左辺を Euler の公式を用いて三角関数で書き表すと,

$$e^{i\alpha}e^{\pm i\beta} = \{\cos(\alpha\pm\beta) + i\sin(\alpha\pm\beta)\} \tag{7}$$

* 福岡大学理学部地球圏科学科. iwayama@fukuka-u.ac.jp

*1 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

を得る. (6) と (7) は等しく, その実部と虚部を比べると, (1), (2) が一度に証明できる.

(3) の証明のヒント： $e^{i\theta}$ の複素共役は $\left(e^{i\theta}\right)^* = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ でる. さらに, $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$ である.

解答例: Euler の公式を使うと,

$$e^{i\theta}\left(e^{i\theta}\right)^* = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta \tag{8}$$

が得られ, 一方指数関数の性質より, $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$ であるので, これらの式より (3) が証明できる.

(4) の証明のヒント: $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ である.

解答例: Euler の公式を使うと,

$$(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \tag{9}$$

が得られ, 一方指数関数の性質より, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$ であるので, これらの式より (4) が証明できる.

例えば, 2 倍角の公式と呼ばれるものは (4) において, $n = 2$ とおくと,

$$\begin{aligned} \cos 2\theta + i\sin 2\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{10}$$

より, 右辺と左辺の実部と虚部をそれぞれ等値すれば

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

が得られる.

今回の数学のポイント

上の例でみたように, 三角関数に関する様々な公式は Euler の公式から導くことができる. 従って, 三角関数の公式を覚えておく必要はなく, Euler の公式を一つだけ覚えておけばいいことになる. これ以降も Euler の公式は何度もこの授業で使います. Eulerの公式は覚えておきましょう.