第 1 章

質点

運動方程式を理解するために必要な概念の解説を行う.

1.1　質点

物理学では, 考察の対象とする現象を理想化して取り扱う, もしくは現象の本質を取り出して, それを研究の対象とすることが常套手段である.

本講義では質点の力学を扱う. **質点**とは仮想的な物体で, 有限の質量を持つが大きさを持たない点のことである. 実在の物体は有限の大きさを持つが, 物体を質点と理想化し, その運動を扱うのが質点の力学である. 実在の物体の運動を考察する際に, 物体の回転や変形を考慮しなくていい場合には, その物体の重心の運動は質点の力学でよく記述される. 例えば, 太陽の周りをまわる地球の公転運動を扱う場合には, 地球を質点として扱う.

有限の大きさと質量を持つが, 変形しない仮想的な物体も物理学の考察の対象である. そのような物体は**剛体**と呼ばれる. 物体の重心の運動だけでなく, 物体の回転も考慮に入れるときには物体を剛体と理想化して扱う.*[1]

1.2　座標系

質点の運動を扱うには, 質点の位置の表し方を定めておかなければならない. 質点の位置を表すには, **座標系**を適当に定め*[2], それによって質点の位置を表す. 「適当に定める」, とは, 考察する問題に適した座標系を用いる, もしくは, 問題が簡単になる座標系を用いることである.

*[1] 後期に開講される「力学 II」(地球圏科学科) や「力学 B」（機械工学科）では剛体の力学を扱う.

*[2] 座標系を張る, という言い方もする

代表的な座標系としては, **デカルト座標系**[*3], 円筒座標系（もしくは円柱座標系）, 極座標系がある.

デカルト座標系は, 図 1.1 に示される座標系で, 互いに直交した座標軸, x 軸, y 軸, z 軸が直線であり, 点 P に質点が存在したとき, 質点の位置を次のように表す：点 P から xy 平面に下した垂線と xy 平面との交点を Q, Q から x 軸に下した垂線と x 軸との交点を R, Q から y 軸に下した垂線と y 軸との交点を S, P から z 軸に下した垂線と z 軸との交点を T, とする. R, S, T はそれぞれ原点 O から, x, y, z の距離にあるとき, 点 P の位置を (x, y, z) と表す. したがって, デカルト座標系では質点の位置は各軸の値の組 (x, y, z) で表現する.

本講義では特に断りがないときにはデカルト座標系を用いる. 解く問題によっては, デカルト座標系よりも円筒座標系 (図 1.2) や極座標系 (図 1.3) を用いたほうが便利な場合がある. これらの座標系は必要になったときに解説する. 本講義では, 2 次元の極座標系を振り子の運動や惑星の運動を取り扱うときに使用する. 2 次元極座標系は, 円筒座標系 (図 1.2) で $z = 0$, もしくは, 極座標系 (図 1.3) で $\theta = \pi/2$ とした場合である.

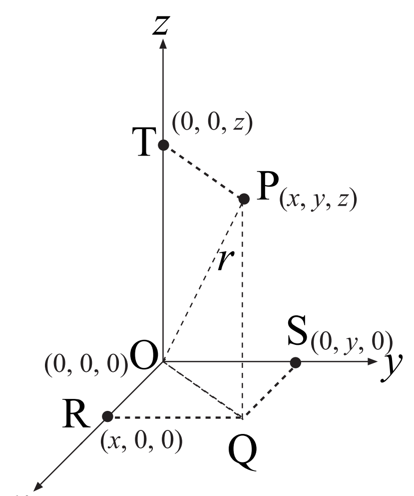

図 1.1　デカルト座標系.

■**自由度**　考察する対象（質点や質点の集まりなど）の運動を決定する独立な変数の個数を運動の**自由度**という. 質点の運動を考察する場合, 独立な変数は質点の位置で, 運動の自由度は一般に質点が運動する空間の次元に等しい. 運動に何らかの束縛を受けている場

[*3] 直交直線座標系とも呼ばれる.

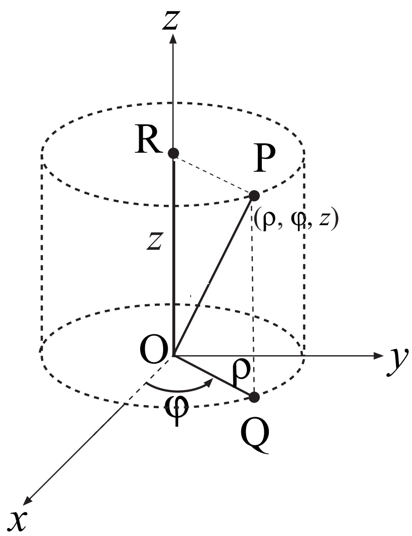

図 1.2　円柱座標系, もしくは円筒座標系. 点 P を OQ 間の長さ ρ と, 或る適当な座標軸からの角度 φ, OR 間の距離 z を使って, 点 P の位置を (ρ, φ, z) と表現する座標系である.

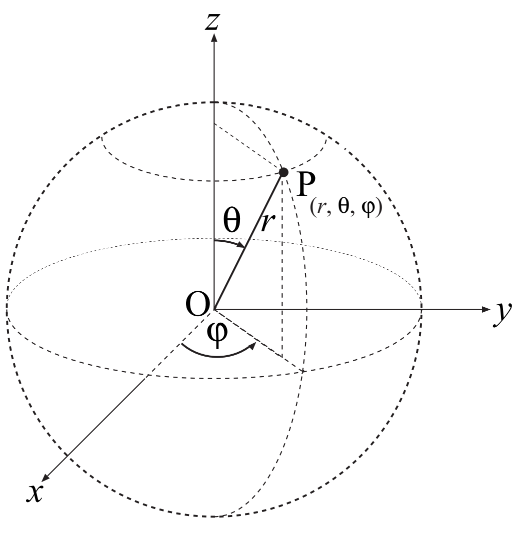

図 1.3　極座標系. 地球が真球だと仮定した場合, 地球を例にして説明すると, 地球中心 O から 点 P までの距離を r, 緯度を φ, 自転軸からの角度を θ として, 点 P の位置を, (r, θ, φ) と表現する座標系である.

合[*4]には, 運動の自由度は空間の次元よりも低くなる. 質点が 3 次元空間中を何の束縛も受けずに運動する場合は自由度は 3 である. 特別な場合として運動が平面内で起こる場合や直線上で起こる場合は, 自由度はそれぞれ 2 と 1 である. 本講義では, 実際に運動方程式を解いて物体の運動を調べる場合には, 問題を簡単化するため, もしくは簡単な問題を通じて物理学や力学の基本的な考え方を理解することを目的として, 自由度が 1 もしくは 2 の問題を取り扱う.

1.3　軌道

質点が運動するとその位置 (x, y, z) は時間と共に変化する. つまり, $(x(t), y(t), z(t))$ と質点の位置座標は時間の関数となる. しばしば時間の依存性の (t) は省略して書く. 時々刻々の質点の位置を点でつなぐと, それは一本の曲線になる. そのような曲線を質点の**軌道**と呼ぶ. 運動方程式を解くと, 質点の位置座標は時間の関数として求められる. つまり, x, y, z は t の関数と書ける. 運動方程式を解いて得られた x, y, z から t を消去することで, 質点の軌道の式が得られる.

例 1： xy 平面内を時刻 $t = 0$ において (x_0, y_0) から x 方向に v_x, y 方向に v_y の速度で運動を始めた質点の位置が,

$$x = x_0 + v_x t, \tag{1.1}$$

$$y = y_0 + v_y t \tag{1.2}$$

で与えられるとき, 質点の軌道は, (1.1), (1.2) から t を消去して,

$$y = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{v_y}{v_x}x_0 + y_0 \tag{1.3}$$

となる. これは $y = ax + b$ の形をしているので, 直線である.

例 2：　xy 平面内で

$$x = a\sin\omega t, \tag{1.4}$$

$$y = b\cos\omega t \tag{1.5}$$

で与えられる質点の位置座標は,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{1.6}$$

という軌道を意味する. この質点の運動は楕円軌道である.[*5]

[*4] 斜面を下る物体は, 斜面上を運動するという束縛を受けているし, 伸びない紐につるされたおもりの振動運動（振り子）では, 振動の中心から質点までの距離が変化しない, という束縛を受けている.

[*5] 運動方程式を解くと, 質点の位置は時間 t の関数として与えられる. ここまではいわば算術である. 単に計算して答えが出ました, で終わりにせず, 得られた結果を吟味することが物理学には必要である. 得ら

1.4　数学の話題：Euler の公式

物理学の問題を扱っているときに様々な関数が現れるが, 三角関数, sin, cos は頻繁に登場する．三角関数では様々な公式が知られている．例えば, 加法定理, 和積の公式, 積和の公式, de Moivre（ド・モアブル）の公式などである．これらの公式は以下の Euler の公式を知っていればそれから簡単に導くことができる．

Euler の公式とは

Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.7}$$

である．ここで, i は純虚数 $i = \sqrt{-1}$, e は Napier 数（ネイピア数）$e = 2.71828\cdots$, θ は実数である．

例えば (1.7) を使うと,

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha. \quad (\text{加法定理 (1)}) \tag{1.8}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \quad (\text{加法定理 (2)}) \tag{1.9}$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1. \tag{1.10}$$
$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n. \quad (\text{de Moivre の公式}) \tag{1.11}$$

が簡単に示せる．4 は $n = 2$ とおくと 2 倍角の公式になる．$n = 3, 4$ などと置くことで 3, 4 倍角公式も求めることができる．加法定理から,

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\}$$

を導くことができるので, 加法定理は覚えましょう, と高校では習ったかもしれない．しかし, Euler の関係式を知っていれば, 加法定理さえも覚えなくてよいのである．

指数関数 e^x は微分しても積分しても形が変わらないのでとても扱いやすい関数である

れた質点の位置から軌道を求め, それが現実や直感と整合的かということを議論する，ということはその一つの例である．

ことはよく知られている. $e^{i\theta}$ を θ で微分して Euler の公式を使うと,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}e^{i\theta}}{\mathrm{d}\theta} &= ie^{i\theta} \quad (\text{純虚数 } i \text{ は定数と見做して指数関数の微分より}) \\
&= i\,(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (\text{Euler の公式より}) \\
&= -\sin\theta + i\cos\theta
\end{aligned} \tag{1.12}$$

となる. 一方, Euler の公式の両辺を θ で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}e^{i\theta}}{\mathrm{d}\theta} = \left(\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta} + i\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta}\right) \tag{1.13}$$

となる. (1.12) と (1.13) は等しく, 実部と虚部を比べると, 三角関数の微分の式

$$\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta$$

が得られる. (もしくは三角関数の微分や指数関数の微分と Euler の公式は矛盾していないのである.)

この指数関数の微分, 積分の性質と Euler の公式は物理学ではとてもよく使うので覚えておくと非常に便利である.

演習問題[*6]

Euler の公式を用いて, (1.8)–(1.11) を証明しなさい.

(1.8),(1.9) **の証明について**:　Euler の公式の便利さを体験するために, 一度自分で手を動かして加法定理を証明しましょう.

(1.10) **の証明のヒント：**　$e^{i\theta}$ の複素共役は $\left(e^{i\theta}\right)^* = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ である. さらに, $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$ である.

(1.11) **の証明のヒント**:　$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ である.

[*6] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.