力学 I / 力学 A
2019 年度講義ノート

岩山 隆寛[*1]

福岡大学 理学部地球圏科学科

[*1] e-mail: iwayama@fukuoka-u.ac.jp

目次

ガイダンス

この講義ノートは, 福岡大学理学部地球圏科学科の「力学 I」, および同大学工学部機械工学科の「力学 A」の講義ノートである. 両方の授業は名称は異なるが共に 1 年生前期に開講されていて, 同じ書籍[*1]を教科書として使用する授業である. この授業やノートで扱うテーマは, 上記の教科書に沿いながら, いくつかの事柄について補足を加えている.

力学を学ぶ意義

自然科学には大きく分けて四つの分野, 物理学, 化学, 生物学, 地学（最近は地球惑星科学とも呼ばれる) がある. この中で物理学は, 最も早く体系化[*2]され, その体系は他の自然科学分野の発展に大きく影響を及ぼした. さらにそれは他の自然科学分野や工学の基礎にもなっている. これらの点から**物理学は自然科学の中で最も基礎的かつ包括的で, 重要な学問分野**である.

物理学は, 考察する対象によっていくつかの分野に分かれている. 物体の運動を扱う「力学」, 熱現象を扱う「熱力学」, 電気・磁気現象を扱う「電磁気学」, 原子などの微視的な世界の現象を扱う「量子力学」, 原子や分子などが非常に多数存在して集団を構成しているとき, その集団の性質を扱う「統計力学」, は物理学の基礎的な分野である. 力学は物理学の分野の中で最も早く体系化された. さらにその体系は, 力学の後に発展した物理学の諸分野の体系化に大きな影響を及ぼした. そこで力学は物理学の骨格であるともいえる. このような理由から大学の理系学部初年次にはほとんど必ず力学の授業が開講されている. そして, 力学をしっかり修めておくことが大学後年時の勉強や卒業研究にとって重要である.

[*1] 小出昭一郎: 物理学（三訂版）, 裳華房, 1997.
[*2] 知識や方法, 法則などを系統立てて整えること, また, まとめあげること.

物理学や力学の論理体系

一般に論理的に結論を導く方法には 2 つの方法, 帰納と演繹, がある.[*3]

帰納とは

帰納とは, 具体的な事例を観察したり集めたりし, そこにある共通点を探したり法則性を見出すことを通じてより一般的な結論を導く方法である.

物理学においては, 実験や観測によって一般的に成り立つ法則を見つけることが帰納的方法である. それらの法則の中で最も基礎的な法則を数式で表現したものは**基礎方程式**と呼ばれる. 基礎方程式が発見されれば, その分野は完成された, といっても過言ではない. 力学, 熱力学, 電磁気学, 量子力学ではそれらの基礎方程式が既に知られている.[*4]

演繹とは

演繹とは, 出発点としてある前提を認めたら, そこから必然の展開として結論を導く方法である.

物理学における出発点としての前提は, **基礎方程式**である. 考察する状況に応じて基礎方程式を立て, それを数学的に解くことにより, 考察したい現象の性質や未来が予測できる. このことから数学は物理学にとっては「ことば」であり密接な関係がある.

本講義の進め方

本講義は演繹的に議論を進めていくことにする. 力学では基礎的法則や基礎方程式は既に知られている. 基礎的な法則は **Newton の運動の法則**, であり, 基礎方程式は **Newton の運動方程式**である. 本講義ではまず先に**基礎方程式を提示**し, **それを理解するための概念を説明**する. 次に**基礎方程式の応用**として, いくつかの具体的な問題を扱う. さらに**基礎方程式から導かれる概念**も解説する.

指定の教科書の各節に従い, 本講義では次の話題を扱う予定である.[*5]

1. 質点
2. ベクトル

[*3] 帰納と演繹の説明には, 滝浦真人, 日本語リテラシー, 2016 年, 放送大学教育振興会　の記述を採用した.

[*4] なお, 電磁気学は既に体系化された学問であるが, 後年次に開講される電磁気学の講義ではしばしば帰納的に議論が展開される.

[*5] 授業回数や 1 階の授業時間の制約から, 話題を整理・統合する場合がある.

3. 変位と速度
4. 加速度
5. 力と慣性
6. 放物運動
7. 単振動
8. 単振り子
9. 仕事とエネルギー
10. 束縛運動
11. 保存力とポテンシャル
12. 位置のエネルギー
13. 平面運動の極座標表示
14. 万有引力と惑星の運動
15. ガリレイ変換と回転座標系

1–4, 15 は基礎方程式を理解するために必要な概念の説明である．5 で力学の基礎的法則, 基礎方程式が語られる．6–8, 10 は運動方程式の応用で, 具体的な問題を解いてみる．これらの問題は高等学校の「物理基礎」で扱われた問題である．高等学校のときと議論の仕方問題の解き方が大きく異なることを実感して欲しい．9, 11, 12, 14 は運動方程式から導かれる性質や概念の解説である．高校の「物理基礎」では天下り的に提示された公式が, 基礎方程式から数学的に導かれることを理解して欲しい.

Newton の運動の法則

Sir Isaac Newton は三つの法則を力学の公理[*6]と考えた．その中でも最も重要なものが Newton の第 2 法則で, それを数学的に書き下したものが力学における基礎方程式, **運動方程式**, である:

Newton の第 2 法則

物体に力 $\boldsymbol{F}$ が働くと速度が変化し（このことは加速度が生じることと等価である）, 物体の加速度は力に比例する:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}. \tag{1}$$

ここで, m は物体の質量, $\boldsymbol{a}$ は加速度である.

[*6] 証明不可能であるが実験や観測から正しいことが示されている根本命題のことを指す.

なお, 物体の加速度 $\boldsymbol{a}$ は速度 $\boldsymbol{v}$ の変化率, $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$, なので, (1) は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{2}$$

とも書かれる．ここで, t は時間である．さらに, 速度 $\boldsymbol{v}$ は位置 $\boldsymbol{r}$ の変化率 $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, なので (2) は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \tag{3}$$

とも書かれる．(1)–(3) は運動方程式と呼ばれる．

表記法

物理学では数式を用いて議論を展開する．数式は数字, 記号で構成されるので, 数式を構成する文字の書き方はとても重要である． (2), (3) において, 例えば力を表す記号 $\boldsymbol{F}$ には F とは異なる文字種, 太文字, を使用していることに注意しよう．太文字で表された記号はベクトル量を表す．$\boldsymbol{r}$ と r の違い, $\boldsymbol{v}$ と v, $\boldsymbol{a}$ と a を区別して欲しい．アルファベッドの他に, ギリシャ文字もよく用いられるのでそのような文字の使用に慣れてほしい．よく使用されるギリシャ文字は α (アルファ), β (ベータ), γ (ガンマ), δ(デルタ), Δ(デルタ), ϵ(イプシロン), π(パイ), θ(シータ), λ(ラムダ) などである．

数学との関係

力学の問題は, 力 $\boldsymbol{F}$ が与えられたときに, 物体が任意の時刻 t においてどのような速度 $\boldsymbol{v}$ で運動するか, さらには任意の時刻にどこの場所 $\boldsymbol{r}$ に存在するか, を求めることである．つまり $\boldsymbol{F}$ が既知の量であり, (2), (3) の微分方程式[*7]を解いて, $\boldsymbol{v}$ を t の関数で表現したり, 物体の位置 $\boldsymbol{r}$ を時間 t の関数として求めたりすることである．このことから, ベクトル, および微分積分の数学的知識を必要とする．講義では数学的知識については必要になったときにその都度解説したり, 毎回の授業で少しずつ概念や便利な計算法を解説したり, 演習問題を解いて計算力を鍛えていくことにする．

高校までに習った数学の復習

- ピタゴラスの定理: 図 1 で示されているように, 底辺 (AB 間) の長さが a, 高さ (BC 間) が b の直角三角形の斜辺 (AC 間) の長さ c は

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{4}$$

[*7] 微分を含んだ方程式のこと．

である.

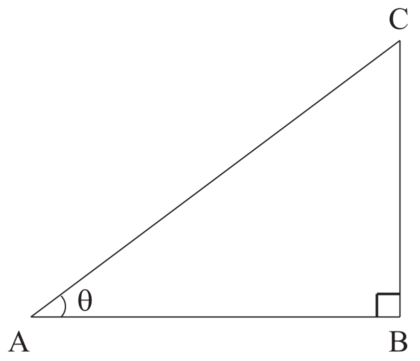

図 1　直角三角形 ABC.

- 三角関数: 図 1 で示されている三角形 ABC において, 辺 AC と辺 AB の間の角度を θ とする. このとき,

$$\sin\theta = \frac{b}{c}, \tag{5}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{c}, \tag{6}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}, \tag{7}$$

である.

- 三角関数の公式:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{8}$$

この公式は有名な公式なので覚えている人も多いと思う. 覚えておくと計算が早まるので便利であるが, 上のピタゴラスの定理と三角関数の定義から自然に導かれる.

- 冪関数の微分: n をある定数, x を実数の変数として, 冪関数 $f(x) = x^n$ を x に関して微分すると,

冪関数の微分

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1} \tag{9}$$

である. ここで, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ は一つの記号を表し, この記号の左側に来る関数を x に関して微分する, という記号である. 高校の数学では $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ は $f(x)'$ と書いていたものである. $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ も $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ も「$f(x)$ を x に関して微分する」, 意味である. 大学以上

の数学では, どの変数で微分するか, ということを明示的に表すために, このような表記になっている. このベクトルを太文字で書いたり, ギリシャ文字の使用の他に, 微分のこのような表記にも慣れていってほしい. $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ はしばしば, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ とも書く.

- 指数関数の微分: x を実数の変数として, 指数関数 $f(x) = e^x$ を x に関して微分すると,

指数関数の微分

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x \tag{10}$$

である.

- 三角関数の微分: x を実数の変数として, 正弦関数 $f(x) = \sin x$ と余弦関数 $g(x) = \cos x$ を x に関して微分すると,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x, \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x \tag{12}$$

である.

- 合成関数の微分: x, y を実数とし, f は y の関数 $f(y)$ であり, さらに y は x の関数 $y(x)$ であるとする. このような関数を合成関数という. このとき, f を x に関して微分すると

合成関数の微分

$$\frac{\mathrm{d}f(y(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \tag{13}$$

である.

- 積関数の微分: x を実数とし, x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積を微分すると

積関数の微分 (微分の連鎖律)

$$\frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \tag{14}$$

である. これは微分の連鎖律 (chain rule) とも呼ばれる.

演習問題[*8]

レポートを提出する際の注意

他人の回答を盲目的に写すことは絶対にしてはいけません．例年, 誤った解答を写して提出する人が極めて多いです．誤った解答を写すことは何の勉強にもなりません．他人の解答を参考にする場合には, 批判的によく確認して, 納得・理解のうえで自分の解答を作成しましょう．模範解答を用意します．模範解答を参考にする場合にも, 批判的によく確認して, 納得・理解のうえで自分の解答を作成しましょう．（誤植などがある場合がありますので.）

1. 三角関数の公式:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

   をピタゴラスの定理と三角関数の定義から導きなさい．

2. t に関する 2 次関数 $f(t) = at^2 + bt + c$ の微分に関して以下の問いに答えなさい．ここで, a, b, c はある定数とする．
   (a) f を t に関して微分しなさい．つまり, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ を求めなさい．解答の際には表記法に注意しましょう．高校までの表記法ではなく, 講義で使用した表記法を使いましょう．[*9]
   (b) 上で得られた答えをさらに t に関して微分しなさい．つまり, $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ を求めなさい．[*10]

3. 合成関数の微分を用いて, 次の問いに答えなさい．
   (a) α を定数, x を実数の変数として, 指数関数 $f(x) = e^{\alpha x}$ を x に関して微分しなさい．[ヒント：$y = \alpha x$ と考える.]

---

*8 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください．提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

*9 f' と書かないように！

*10 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ を t に関して微分するとき, 表記法としては,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$$

や

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$$

と書く．これらは, f の t による 2 階微分, という.

(b) α を定数, x を実数の変数として, 指数関数 $f(x)=e^{\alpha x^2}$ を x に関して微分しなさい. [ヒント：$y=\alpha x^2$ と考える.]

(c) α を定数, x を実数の変数として, 正弦関数 $f(x)=\sin(\alpha x)$ と余弦関数 $g(x)=\cos(\alpha x)$ を x に関して微分しなさい.

4. 積関数と冪関数の微分の公式を使用して,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}f-g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}{f^2}$$

となることを示しなさい.

第 1 章

質点

運動方程式を理解するために必要な概念の解説を行う.

1.1 質点

物理学では, 考察の対象とする現象を理想化して取り扱う, もしくは現象の本質を取り出して, それを研究の対象とすることが常套手段である.

本講義では質点の力学を扱う. **質点**とは仮想的な物体で, 有限の質量を持つが大きさを持たない点のことである. 実在の物体は有限の大きさを持つが, 物体を質点と理想化し, その運動を扱うのが質点の力学である. 実在の物体の運動を考察する際に, 物体の回転や変形を考慮しなくていい場合には, その物体の重心の運動は質点の力学でよく記述される. 例えば, 太陽の周りをまわる地球の公転運動を扱う場合には, 地球を質点として扱う.

有限の大きさと質量を持つが, 変形しない仮想的な物体も物理学の考察の対象である. そのような物体は**剛体**と呼ばれる. 物体の重心の運動だけでなく, 物体の回転も考慮に入れるときには物体を剛体と理想化して扱う.*1

1.2 座標系

質点の運動を扱うには, 質点の位置の表し方を定めておかなければならない. 質点の位置を表すには, **座標系**を適当に定め*2, それによって質点の位置を表す. 「適当に定める」, とは, 考察する問題に適した座標系を用いる, もしくは, 問題が簡単になる座標系を用いることである.

*1 後期に開講される「力学 II」(地球圏科学科) や「力学 B」(機械工学科) では剛体の力学を扱う.

*2 座標系を張る, という言い方もする

代表的な座標系としては, **デカルト座標系**[*3], 円筒座標系（もしくは円柱座標系）, 極座標系がある.

デカルト座標系は, 図 1.1 に示される座標系で, 互いに直交した座標軸, x 軸, y 軸, z 軸が直線であり, 点 P に質点が存在したとき, 質点の位置を次のように表す：点 P から xy 平面に下した垂線と xy 平面との交点を Q, Q から x 軸に下した垂線と x 軸との交点を R, Q から y 軸に下した垂線と y 軸との交点を S, P から z 軸に下した垂線と z 軸との交点を T, とする. R, S, T はそれぞれ原点 O から, x, y, z の距離にあるとき, 点 P の位置を (x, y, z) と表す. したがって, デカルト座標系では質点の位置は各軸の値の組 (x, y, z) で表現する.

本講義では特に断りがないときにはデカルト座標系を用いる. 解く問題によっては, デカルト座標系よりも円筒座標系 (図 1.2) や極座標系 (図 1.3) を用いたほうが便利な場合がある. これらの座標系は必要になったときに解説する. 本講義では, 2 次元の極座標系を振り子の運動や惑星の運動を取り扱うときに使用する. 2 次元極座標系は, 円筒座標系 (図 1.2) で $z = 0$, もしくは, 極座標系 (図 1.3) で $\theta = \pi/2$ とした場合である.

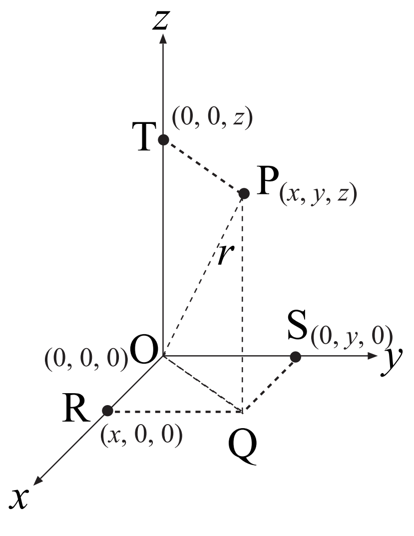

図 1.1　デカルト座標系.

■**自由度**　考察する対象（質点や質点の集まりなど）の運動を決定する独立な変数の個数を運動の**自由度**という. 質点の運動を考察する場合, 独立な変数は質点の位置で, 運動の自由度は一般に質点が運動する空間の次元に等しい. 運動に何らかの束縛を受けている場

*3 直交直線座標系とも呼ばれる.

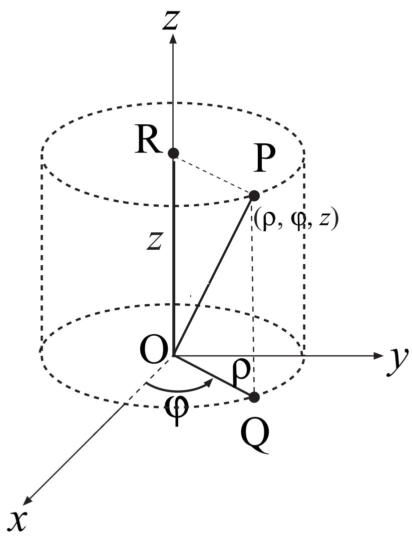

図 1.2　円柱座標系, もしくは円筒座標系. 点 P を OQ 間の長さ ρ と, 或る適当な座標軸からの角度 φ, OR 間の距離 z を使って, 点 P の位置を (ρ, φ, z) と表現する座標系である.

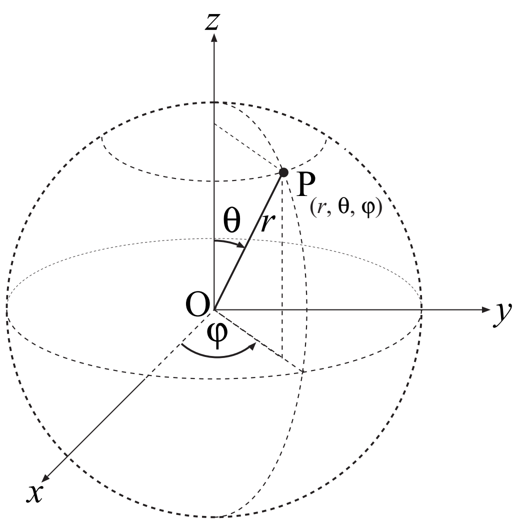

図 1.3　極座標系. 地球が真球だと仮定した場合, 地球を例にして説明すると, 地球中心 O から 点 P までの距離を r, 緯度を φ, 自転軸からの角度を θ として, 点 P の位置を, (r, θ, φ) と表現する座標系である.

合[*4]には, 運動の自由度は空間の次元よりも低くなる．質点が 3 次元空間中を何の束縛も受けずに運動する場合は自由度は 3 である．特別な場合として運動が平面内で起こる場合や直線上で起こる場合は, 自由度はそれぞれ 2 と 1 である．本講義では, 実際に運動方程式を解いて物体の運動を調べる場合には, 問題を簡単化するため, もしくは簡単な問題を通じて物理学や力学の基本的な考え方を理解することを目的として, 自由度が 1 もしくは 2 の問題を取り扱う.

1.3　軌道

質点が運動するとその位置 (x, y, z) は時間と共に変化する．つまり, $(x(t), y(t), z(t))$ と質点の位置座標は時間の関数となる．しばしば時間の依存性の (t) は省略して書く．時々刻々の質点の位置を点でつなぐと, それは一本の曲線になる．そのような曲線を質点の**軌道**と呼ぶ．運動方程式を解くと, 質点の位置座標は時間の関数として求められる．つまり, x, y, z は t の関数と書ける．運動方程式を解いて得られた x, y, z から t を消去することで, 質点の軌道の式が得られる.

例 1： xy 平面内を時刻 $t = 0$ において (x_0, y_0) から x 方向に v_x, y 方向に v_y の速度で運動を始めた質点の位置が,

$$x = x_0 + v_x t, \tag{1.1}$$
$$y = y_0 + v_y t \tag{1.2}$$

で与えられるとき, 質点の軌道は, (1.1), (1.2) から t を消去して,

$$y = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{v_y}{v_x}x_0 + y_0 \tag{1.3}$$

となる．これは $y = ax + b$ の形をしているので, 直線である.

例 2：　xy 平面内で

$$x = a\sin\omega t, \tag{1.4}$$
$$y = b\cos\omega t \tag{1.5}$$

で与えられる質点の位置座標は,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{1.6}$$

という軌道を意味する．この質点の運動は楕円軌道である.[*5]

[*4] 斜面を下る物体は, 斜面上を運動するという束縛を受けているし, 伸びない紐につるされたおもりの振動運動（振り子）では, 振動の中心から質点までの距離が変化しない, という束縛を受けている.

[*5] 運動方程式を解くと, 質点の位置は時間 t の関数として与えられる．ここまではいわば算術である．単に計算して答えが出ました, で終わりにせず, 得られた結果を吟味することが物理学には必要である．得ら

1.4　数学の話題：Euler の公式

物理学の問題を扱っているときに様々な関数が現れるが, 三角関数, sin, cos は頻繁に登場する．三角関数では様々な公式が知られている．例えば, 加法定理, 和積の公式, 積和の公式, de Moivre（ド・モアブル）の公式などである．これらの公式は以下の Euler の公式を知っていればそれから簡単に導くことができる．

Euler の公式とは

Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.7}$$

である．ここで, i は純虚数 $i = \sqrt{-1}$, e は Napier 数（ネイピア数）$e = 2.71828\cdots$, θ は実数である．

例えば (1.7) を使うと,

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha. \quad (\text{加法定理 (1)}) \tag{1.8}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \quad (\text{加法定理 (2)}) \tag{1.9}$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1. \tag{1.10}$$
$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n. \quad (\text{de Moivre の公式}) \tag{1.11}$$

が簡単に示せる．4 は $n = 2$ とおくと 2 倍角の公式になる．$n = 3, 4$ などと置くことで 3, 4 倍角公式も求めることができる．加法定理から,

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\}$$

を導くことができるので, 加法定理は覚えましょう, と高校では習ったかもしれない．しかし, Euler の関係式を知っていれば, 加法定理さえも覚えなくてよいのである．

指数関数 e^x は微分しても積分しても形が変わらないのでとても扱いやすい関数である

れた質点の位置から軌道を求め, それが現実や直感と整合的かということを議論する，ということはその一つの例である．

ことはよく知られている. $e^{i\theta}$ を θ で微分して Euler の公式を使うと,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e^{i\theta}}{\mathrm{d}\theta} &= ie^{i\theta} \quad (\text{純虚数 } i \text{ は定数と見做して指数関数の微分より}) \\ &= i\,(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (\text{Euler の公式より}) \\ &= -\sin\theta + i\cos\theta \end{aligned} \tag{1.12}$$

となる. 一方, Euler の公式の両辺を θ で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}e^{i\theta}}{\mathrm{d}\theta} = \left(\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta} + i\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta}\right) \tag{1.13}$$

となる. (1.12) と (1.13) は等しく, 実部と虚部を比べると, 三角関数の微分の式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta} &= -\sin\theta \\ \frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta} &= \cos\theta\end{aligned}$$

が得られる. (もしくは三角関数の微分や指数関数の微分と Euler の公式は矛盾していないのである.)

この指数関数の微分, 積分の性質と Euler の公式は物理学ではとてもよく使うので覚えておくと非常に便利である.

演習問題[*6]

Euler の公式を用いて, (1.8)–(1.11) を証明しなさい.

(1.8),(1.9) の証明について:　Euler の公式の便利さを体験するために, 一度自分で手を動かして加法定理を証明しましょう.

(1.10) の証明のヒント：　$e^{i\theta}$ の複素共役は $\left(e^{i\theta}\right)^* = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ である．さらに, $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$ である.

(1.11) の証明のヒント:　$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ である.

[*6] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください．提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

第 2 章

ベクトル

物理学の法則は, しばしはベクトルを用いて表現される．ベクトルを用いた表現は**ベクトル形式**とも呼ばれる．ベクトルは採用する座標系に依存しない量なので, ベクトル形式で書かれた物理法則も座標系に依存しないものである．

ここではベクトルの表記法と計算法について述べておく．

2.1 スカラーとベクトル

長さ, 時間, 質量のような物理学における様々な量を特徴づけるには, 単位[*1]は別にして単一の実数が必要である．そのような量は**スカラー**（もしくはスカラー量）と呼ばれ, その実数はその量の大きさと呼ばれる．スカラーは記号で A, B, C, a, b, c などと書く．

いっぽう, 速度のような量を特徴づけるには, 大きさの他に方向も必要である．そのような量は**ベクトル**（ベクトル量）と呼ばれる．ベクトルは幾何学的には点 P と点 Q を結ぶ矢印 PQ で表され (図 2.1 参照), このとき P はベクトルの**始点**, Q はベクトルの**終点**と呼ばれる．ベクトルは記号で太文字を使用して $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ などと書く．$\boldsymbol{A}$ の大きさ $|\boldsymbol{A}|$ は A と書かれる．即ち, $|\boldsymbol{A}| = A$ である．

ベクトルの表記法についての注意 (その 1)

ベクトルを表すときには, 高校では例えば $\vec{A}$ のように記号の上に矢印を付けて表した．本講義や大学で使用する多くの教科書では上付きの矢印ではなく, $\boldsymbol{A}$ のように太文字を使う．この表記法に早く慣れてほしい．もちろん, A のように上付きの矢印も太文字にもなっていない記号はベクトルではないことに注意しておく．

[*1] 長さ, 時間, 質量の単位としてはメートル [m], 秒 [s], キログラム [kg] を用いる．このような単位系は SI 単位系と呼ばれる．

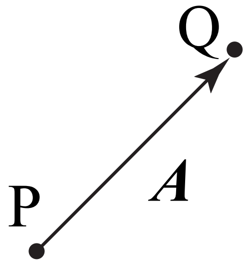

図 2.1　始点 P と終点 Q を結ぶベクトル $\boldsymbol{A}$.

2.2　ベクトルの代数

スカラーもしくは実数の足し算, 引き算, 掛け算はベクトルにも拡張することができる. ここでは足し算と引き算のみを解説しておく. ベクトルどうしの掛け算はあとの章で解説する.

1. 始点に関係なく, 互いに平行で大きさの等しい二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は等しい : $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ (図 2.2 参照).

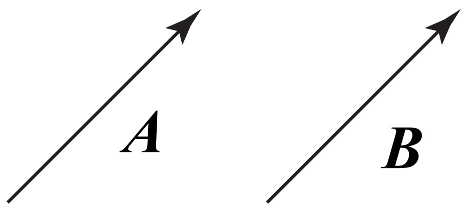

図 2.2　互いに平行で大きさの等しい二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$.

2. ベクトル $\boldsymbol{A}$ と同じ大きさを持ち, 逆方向を向くベクトルは $-\boldsymbol{A}$ と表される (図 2.3 参照).

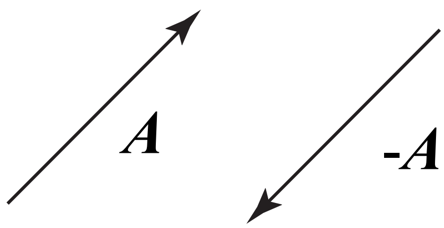

図 2.3　$\boldsymbol{A}$ と $-\boldsymbol{A}$.

3. 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の和を $\boldsymbol{C}$ とすると, $\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{A}$ の終点に $\boldsymbol{B}$ の始点を合わせ

たときの, $\boldsymbol{A}$ の始点と $\boldsymbol{B}$ の終点を結ぶベクトルで作られる．これは, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の始点合わせたとき, これら 2 つのベクトルで作られる平行四辺形の対角線である*2(図 2.4 参照).

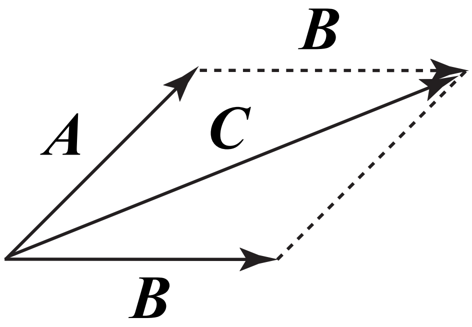

図 2.4　ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

4. ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ との差 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ ベクトルに $-\boldsymbol{B}$ ベクトルを足したものである．即ち, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$ である．これは $\boldsymbol{B}$ ベクトルの終点から $\boldsymbol{A}$ の終点に向かうベクトルに等しい (図 2.5 参照).

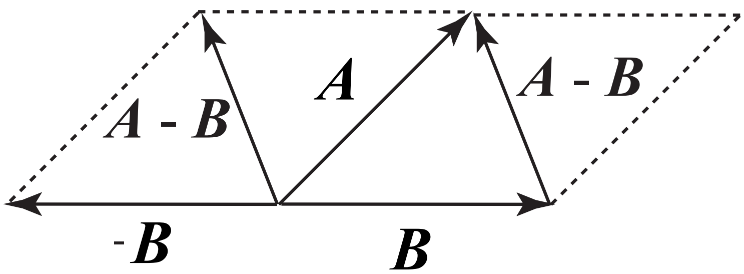

図 2.5　ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の差 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

5. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ ならば, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ はゼロベクトルで $\boldsymbol{0}$ と表される. このベクトルは大きさはゼロで向きは定義できない.
6. ベクトル $\boldsymbol{A}$ とスカラー p との積は, $p\boldsymbol{A}$, もしくは $\boldsymbol{A}p$ と書き, その大きさは pA で向きは $p>0$ のときは $\boldsymbol{A}$ と同じ向き, $p<0$ のときは $\boldsymbol{A}$ と逆向きである．$p=0$ なら $p\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ である.

*2 平行四辺形の法則とも呼ばれる.

■ベクトルの代数の法則　$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ がベクトルで, p と q がスカラーとする．このとき以下の法則が成り立つ[*3]:

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$: 和に関する可換則
2. $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$: 和に関する結合則
3. $p(q\boldsymbol{A})=(pq)\boldsymbol{A}$: 積に関する結合則
4. $(p+q)\boldsymbol{A}=p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{A}$: 分配則
5. $p(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=p\boldsymbol{A}+p\boldsymbol{B}$: 分配則

2.3　単位ベクトル

単位の長さ（長さが 1）のベクトルは, **単位ベクトル**と呼ばれる．長さ $A(>0)$ を持つベクトルを $\boldsymbol{A}$ とする．このとき, $\hat{\boldsymbol{A}}=\frac{\boldsymbol{A}}{A}$ は $\boldsymbol{A}$ と同じ方向を持った単位ベクトルである．単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{A}}$ と大きさ A を用いてベクトル $\boldsymbol{A}$ を表現すると, $\boldsymbol{A}=A\hat{\boldsymbol{A}}$ である．

デカルト座標系の x, y, z 軸の正の方向を向いた単位ベクトルは互いに直交しており, **直交単位ベクトル**と呼び, 慣例的にそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ と書く (図 2.6 参照).

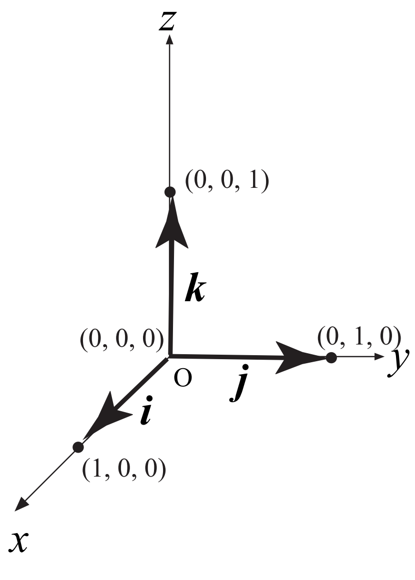

図 2.6　デカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

*3 自分で絵を描いて直感的に上記の法則が成り立つことは容易に確かめられるであろうから, 証明は省略する．

2.4　ベクトルの分解

3 次元の任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ はデカルト座標系の原点 O に始点を持つベクトルで表すことができる．O に始点を持つベクトル $\boldsymbol{A}$ の終点の座標を (A_x, A_y, A_z) とする．A_x, A_y, A_z はそれぞれ $\boldsymbol{A}$ の x, y, z **成分**と呼ばれる．さらに，ベクトル $\boldsymbol{A}$ はこれらの成分と単位ベクトルを使って，

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ のデカルト座標系における分解

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_y\boldsymbol{k} \tag{2.1}$$

と書ける．(2.1) は $\boldsymbol{A}$ のデカルト座標系における分解と呼ばれる (図 2.7 参照)．

ベクトルの表記法についての注意 (その 2)

ベクトル $\boldsymbol{A}$ の x, y, z 成分がそれぞれ A_x, A_y, A_z であるとき，高校では $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と表記した．本講義や大学で使用する多くの教科書では単位ベクトルまで付して，

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

と表記する．このような書き方に早く慣れて欲しい．<u>ベクトルを分解するときに単位ベクトルまで含めて書いておく</u>ことは次の章で導入するベクトルの微分の最に重要になってくる．

$\boldsymbol{A}$ の大きさはピタゴラスの定理より

$$A = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{2.2}$$

である．ベクトル $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ の和は，

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} + (A_z + B_z)\boldsymbol{k} \tag{2.3}$$

である．また $\boldsymbol{A}$ のスカラー倍は

$$p\boldsymbol{A} = pA_x\boldsymbol{i} + pA_y\boldsymbol{j} + pA_z\boldsymbol{k} \tag{2.4}$$

である．もし，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ ならば，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の各成分が等しい．つまり，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \\ &\Longrightarrow A_x = B_x,\ A_y = B_y,\ A_z = B_z. \end{aligned} \tag{2.5}$$

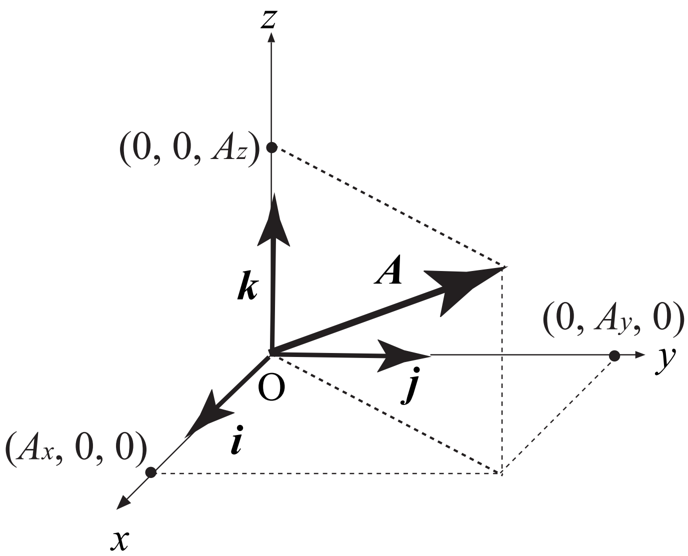

図 2.7　$\boldsymbol{A}$ のデカルト座標系における分解．$\boldsymbol{A}$ の x, y, z 成分はそれぞれ A_x, A_y, A_z である．

2.5　位置ベクトル

質点の力学では, ある力の作用のもとにおける質点の位置 (や速度) を, 任意の時刻において知ることが一つの目的である．前章では,「質点の位置は座標系を使って表す」, と述べたが, ベクトルを使って表現しておくと非常に便利であることが次の章でわかる．座標系の原点と質点の位置とを結ぶベクトルは**位置ベクトル**と呼ばれ, 慣例的に $\boldsymbol{r}$ と表す．デカルト座標系を採用したときには位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の分解

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{2.6}$$

と書かれる．$\boldsymbol{r}$ は $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ の大きさを持つ．

演習問題[*4]

1. ベクトル表記の練習をしましょう．アルファベッドの大文字, 小文字, 合わせて 52 文字をベクトル表記しなさい．要するに, 太文字で書いてみる．幼稚に思うかもしれませんが, 文字 (ひらがな, カタカナ, 漢字, アルファベット) を習ったときに沢山練習をしたと思います．練習しないと文字は書けません．ベクトルを書けない人が例年極めて多いので, あえて練習問題にしました．太文字に見えるように自分なり工夫してみましょう.(例えば, 図 2.8 参照.)
2. 東に向かって流速 6 km/h で水が流れている川を, 船首を真北に向けて水に対する相対速度 8 km/h で進む船の速さを岸からみるといくらになるか．またその進行方向はどうなるか.

   ヒント:　速度は大きさと方向を持つベクトルなので, ベクトルの足し算を行う．ベクトルの大きさが速さであり, 方向は x 座標と船の速度を表すベクトルとの間の角度もしくは角度の tan で答えてみましょう.[*5] 座標系は岸に固定した座標系で, 東向きに x 軸, 北向きに y 軸をとる．この場合は 2 次元で問題を考える（高さ方向,z 方向, は考えない）．そこで, 例えば, 川の水の速度は $\boldsymbol{v}_{\mathrm{river}} = 6\boldsymbol{i}$ と表される．ここで, $\boldsymbol{i}$ は x 方向の単位ベクトルである.
3. m をスカラー, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{F}$ は共にベクトルで, それぞれデカルト座標系で

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{F} &= F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

   と分解されるとする．ここで, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトルである．もし, m, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{F}$ が

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{2.7}$$

   の関係式を満たすとき, 各成分が満たす方程式を答えなさい.

[*4] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください．提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

[*5] もちろん, y 座標と船の速度を表すベクトルとの間の角度の tan でもよい．方角をどう表すかを自分で設定すればよい．教科書 (p.5 [問]) では y 座標と船の速度を表すベクトルとの間の角度の tan で答えている.

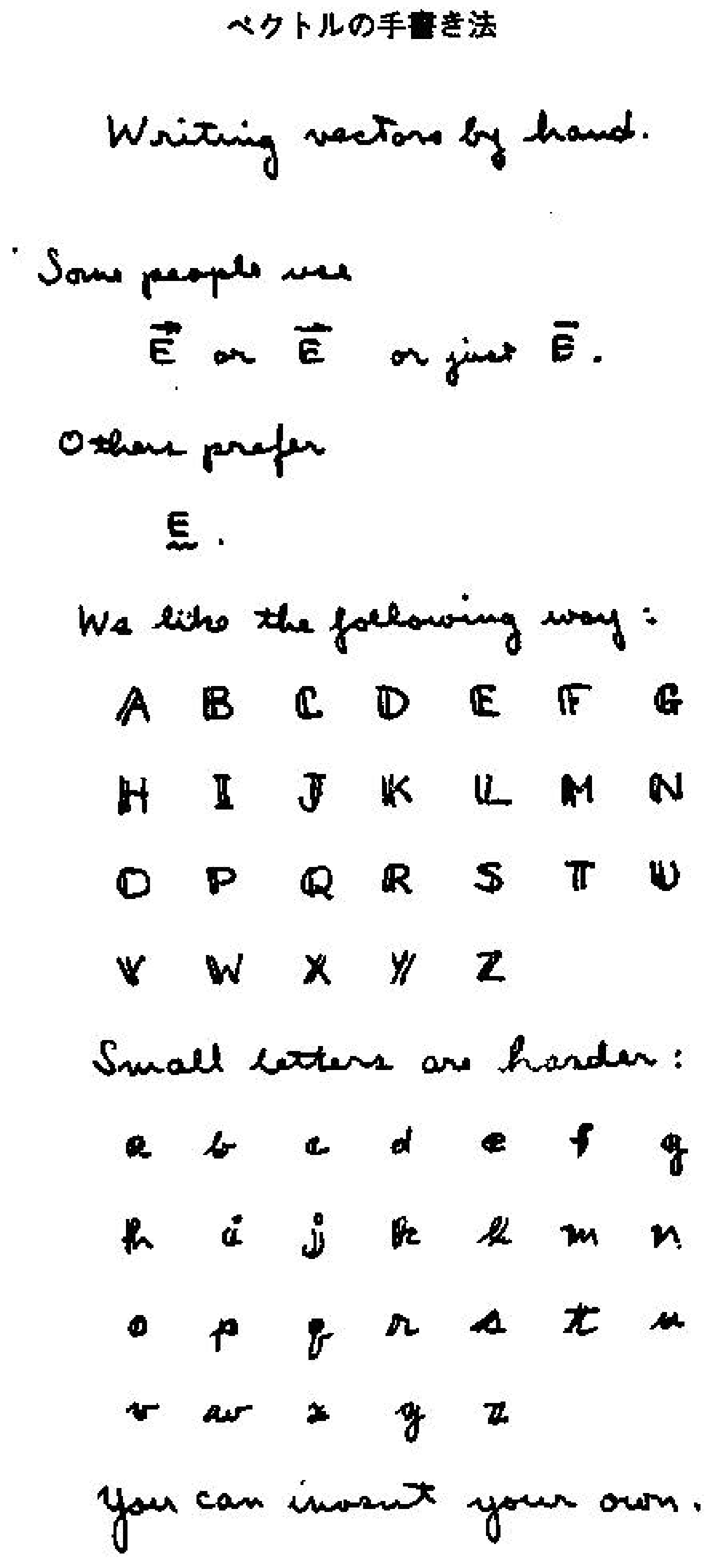

図 2.8　ベクトルの手書き法.（R. P. Feynman　他, 「ファインマン物理学 III」, 1969 年, 岩波書店, p.15.）

第 3 章

ベクトルの微分

前節で解説したベクトルについて, その微分を定義し, さらに速度と加速度を導入する.

3.1　微分の復習

実数 t を独立変数とするある関数を $f(t)$ とする.[*1] $f(t)$ の t に関する微分とは以下のように定義される量である: t における f の値 $f(t)$ と $t+\Delta t$ における f の値 $f(t+\Delta t)$ との差

$$f(t+\Delta t)-f(t) \tag{3.1}$$

を独立変数の間隔 Δt で割り

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{3.2}$$

さらに $\Delta t \to 0$ という極限を取ったもの

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{3.3}$$

は $f(t)$ の t に関する微分と呼び, $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ と書く. 即ち,

[*1] 物理的な例としては t を時間, 力学の例ではないが, 時間に依存する身近なスカラー量 f としては温度がある. 以降しばしば t を断りなしに時間と呼ぶことがある. 物理学では標準的な表記法として時間を t と書き表す.

スカラー量（スカラー関数）の微分の定義

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{3.4}$$

である．(3.4) における $\equiv$ は「定義」を意味する．[*2] $f(t)$ の t 依存性をしばしば省略して, $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ を

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \tag{3.5}$$

と書くこともある．$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ という記号は, この記号に引き続く 関数を t に関して微分するという意味である．$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ と $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f$ は同じ意味である．

(3.1) は時間間隔 Δt における f の変化量を表している．[*3] さらに, (3.2) は Δt の間の f の平均的な変化率 を表している．さらに $\Delta t \to 0$ の極限を取ることで, 時刻 t における f の瞬間的な変化率を表してる．[*4]

微分の意味としてしばしば曲線の傾きである, という言い方をする．もちろん幾何学的な解釈としてこのことは正しい．別の解釈としてもっと単純に (3.4) を参照すると「**微分とは引き算**である」ともいえる．計算機を用いて微分を計算する際には $\Delta t \to 0$ という極限が計算機ではとれないので, しばしば微分を

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{3.6}$$

等と引き算で近似してしまう．(3.6) は微分の差分近似と呼ばれている．

(3.4) を見るとわかるように $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ も一般に t の関数になっている．要するに, f の瞬間的な変化率は一般に時々刻々変化しているので, t の関数になっているのである．$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ は t の関数なので, それをさらに微分することができる：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$．これは f の t に関する 2 階微分と呼ばれる．$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$ は $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ とも書かれる．

3.2　ベクトルの微分

スカラーの微分と同様にベクトルの微分も次のように定義する．実数 t を独立変数とするあるベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ の微分は

[*2] 高校では合同を意味する記号として使用したが, 大学では定義を示す記号として用いられる．

[*3] 変化量をしばしば記号で Δ (大文字のデルタ．アルファベットの D に対応する文字) と表す．即ち, f の変化量は Δf と表す．このような記号を用いると, (3.2) は $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ と書け, さらに (3.4) ではこの Δ という記号は $\Delta t \to 0$ の極限を取ると, d という記号に置き換わっている．

[*4] f を温度と考えると, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ は時刻 t における瞬間的な温度の変化率である．

ベクトルの微分

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t} \tag{3.7}$$

と定義される．ベクトルの微分はベクトルであることを注意しておく.[*5] さらに, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ は (3.7) を参照すると引き続き t の関数になっていることがわかる．$\boldsymbol{A}$ が t に依存するとは, $\boldsymbol{A}$ の大きさも向きも t が変化するとともに変わっていくことを意味し, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ が t に依存しているということは $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ の大きさも向きも t が変化するとともに変わっていくことを意味する．

ベクトル $\boldsymbol{A}$ を分解してデカルト座標系の成分と単位ベクトルで表現したとき, その微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + A_x\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + A_y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} + A_z\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

となる．第 1 式から第 2 式への変形は, 微分の連鎖律 (14) によって成分の微分だけでなく単位ベクトルの微分も行わないといけない．ただし, デカルト座標系の座標軸の向きは時間に依存せず, 常に同じ方向を向いているので, 従ってデカルト座標系の単位ベクトルは時間に依存しない[*6]．つまり $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = 0$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} = 0$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = 0$ である．あるベクトルの微分をデカルト座標系で分解すると, 単にそのベクトルの成分を微分したものを成分として持つベクトルになるのである．

極座標系や円筒座標系の場合には単位ベクトルが時間と共に方向を変えるので, 単位ベクトルの時間微分はゼロではない．このことは, 後の章で 2 次元極座標系を用いて質点の運動を調べる（単振り子や惑星の運動を調べる）ときに述べることにする．

3.3　変位, 速度, 加速度

時刻 t において, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ で表される点 P にあった質点が, Δt 時間後に位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ で表わされる点 Q に移動したとする (図 3.1 参照)．Δt の間の平均的な質点の速度は, 向きは P から Q に向かい, 大きさは PQ 間の長さを Δt で割ったもので

[*5] ベクトルの差 $\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)$ はベクトルであり, それをスカラ量 Δt で割ってもベクトルになっている．

[*6] 単位ベクトルの大きさは, 単位ベクトルの定義から 1 であるので単位ベクトルの大きさは時間に依存しない．さらに, 座標軸の向きが変わらないので単位ベクトルの方向も時間に依存しない

ある．P から Q に向う向きを持ち, PQ 間の長さを持つベクトル, 即ち, P を始点, Q を終点とするベクトルは, P と Q の位置ベクトルを使って, $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$ と表せる.*7 そこで Δt の間の平均的な質点の速度は,

$$\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{3.9}$$

となる．さらに, (3.9) において, $\Delta t \to 0$ の極限を取るとそれは時刻 t における質点の瞬間的な速度 $\boldsymbol{v}(t)$ になる．つまり

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

は時刻 t における質点の瞬間的な速度で, したがって速度は微分を用いて

位置ベクトルと速度との関係

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.10}$$

となる．$\boldsymbol{v}(t)$ はしばしば $\boldsymbol{v}$ と書かれる．速度 $\boldsymbol{v}$ はベクトルであることを注意しておく．

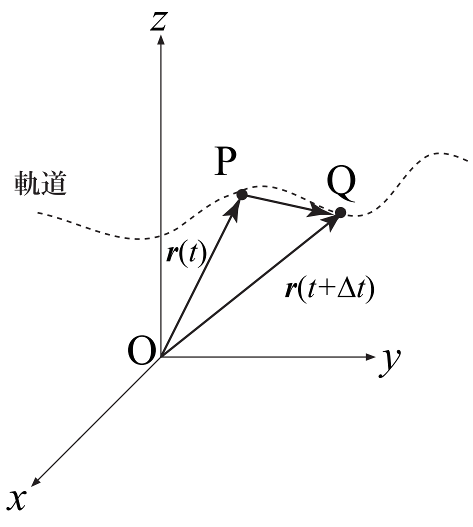

図 3.1　速度の説明図．ある時刻 t に点 P にあった質点が, 時刻 $t+\Delta t$ に点 Q に移動したとする．破線は質点の軌道を表し, 点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ と表すと, 点 Q の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ である．

$\boldsymbol{v}$ は引き続き t の関数になっていて, 質点の位置と同様に時間とともに $\boldsymbol{v}$ の方向と大きさは変わっていく．時刻 t における瞬間的な速度の変化率, 加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ は, 位置ベクトルから速度を導いたときと同様の議論によって

*7 位置ベクトルの変化を**変位**と呼び, しばしば $\Delta\boldsymbol{r}$ と表す: $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$.

速度と加速度の関係

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.11}$$

となる．速度 $\boldsymbol{v}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の間の関係を使うと

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{3.12}$$

と書ける．$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ の記号の意味は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tag{3.13}$$

と時間微分を2回作用させることを意味する．(3.12) は,「加速度は位置ベクトルの時間による2階微分で与えられる」, と表現される．速度と同様に加速度もベクトルであることを注意しておく．

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{3.14}$$

のようにデカルト座標系で分解したときの, 速度と加速度の分解は次のようになる：先ず, 速度 $\boldsymbol{v}$ の x, y, z 成分をそれぞれ v_x, v_y, v_z と表すと,

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

である．一方, 速度は位置ベクトルの時間微分なので,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

である．ここで, デカルト座標系の単位ベクトルは時間に依存しないことを用いている．したがって速度の各成分は

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{3.15a}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \tag{3.15b}$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \tag{3.15c}$$

と表せる．同様に加速度 $\boldsymbol{a}$ の x, y, z 成分をそれぞれ a_x, a_y, a_z と表すと,

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

である．一方, 加速度は速度の時間微分なので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

である．ここで, 再びデカルト座標系の単位ベクトルは時間に依存しないことを用いている．したがって, $\boldsymbol{a}$ の各成分は

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \tag{3.16a}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \tag{3.16b}$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}. \tag{3.16c}$$

と表せる．さらに (3.15) を用いると

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \tag{3.17a}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, \tag{3.17b}$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}, \tag{3.17c}$$

である．

3.4　例

2 次元平面内を一定の半径 A を保ち, 一定の角速度 ω で円軌道を描いて運動する質点の位置ベクトルは,

$$\boldsymbol{r} = A\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + A\sin\omega t\,\boldsymbol{j} \tag{3.18}$$

で与えられる．このとき, 質点の速度 $\boldsymbol{v}$ と加速度 $\boldsymbol{a}$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + A\sin\omega t\,\boldsymbol{j}\right) \\
&= \left(-\omega A\sin\omega t\right)\boldsymbol{i} + \left(\omega A\cos\omega t\right)\boldsymbol{j}, \qquad (3.19)\\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(-\omega A\sin\omega t\right)\boldsymbol{i} + \left(\omega A\cos\omega t\right)\boldsymbol{j}\right\} \\
&= \left(-\omega^2 A\cos\omega t\right)\boldsymbol{i} + \left(-\omega^2 A\sin\omega t\right)\boldsymbol{j} \\
&= -\omega^2\left(A\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + A\sin\omega t\,\boldsymbol{j}\right) \\
&= -\omega^2\boldsymbol{r} \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

となる．(3.20) は, 加速度の向きが位置ベクトルの向きと逆であることを示している．

演習問題[*8]

高等学校の物理基礎の教科書に掲載されている物体の位置と速度を表す公式[*9]が, この章で議論したことと矛盾がないことを示してみよう.

注意 1: ここで掲載する公式を覚えておく必要は全くない. 公式とこの章の議論とに矛盾がないことを確認すること, および, 計算練習をすることがこの演習問題の目的である.

注意 2: 以下の公式で速度と参照しているものは, ベクトルとしての速度 $\boldsymbol{v}$ のある座標の成分であり, 位置と呼んでいるものも位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ のある座標の成分である. また, 以下の公式では初期時刻 $(t = 0)$ において物体は原点にあると暗黙に仮定されている. 問題を解くにあたり, 先ず自分で座標系を設定しましょう.

1. 等速直線運動：一直線上を一定の速さ v で進む物体の位置 x は

$$x = vt \tag{3.21}$$

である.

2. 等加速度直線運動：一直線上を初速度 v_0 で一定の加速度 a で進む物体の速度 v と位置 x は

$$v = v_0 + at \tag{3.22}$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{3.23}$$

である.

3. 鉛直投げ上げ運動（上向き正）：重力だけが働く環境で, 初速度 v_0 で投げ上げた物体の速度 v と位置 y は

$$v = v_0 - gt \tag{3.24}$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.25}$$

である. ここで, g は重力加速度である.

[*8] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

[*9] 植松恒夫 他, 物理基礎 改訂版, 2016 年, p.36 より抜粋.

第 4 章

Newton の運動の法則

観測事実, 実験事実などから物体の運動に関してこの章で紹介する三つの法則が成り立っていることが知られており, それらが力学の法則の中で最も基本的なものと考えられている.

4.1 Newton の第 1 法則

Newton の第 1 法則

物体に外部から力が働かなければ, 物体は静止し続けるか, または一直線上を一定の速度で運動し続ける.

物体が持っている静止し続ける, もしくは一定の速度で運動し続ける性質を**慣性**と呼ぶ. 第 1 法則は「**慣性の法則**」とも呼ばれる.

速度はベクトル量であるので, 一定の速度とは速度の大きさも向きも時間とともに変化しないことを意味する. 例えば, 一定の速さで円軌道を描いて運動 (等速円運動) する物体の速度は時間とともに向きが変わっているので, この場合は速度は時間とともに変化している.（前章の 3.4 節参照.） したがって, 一定の速さで円軌道を描いて運動している物体には外力が働いているのである.

4.2 Newton の第 2 法則

Newton の第 2 法則

物体に外部から力が働くと速度が変化し（加速度が生じ）, 物体の加速度は力に比例する.

Newton の第 2 法則を具体的に数式で書き表すと

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \tag{4.1}$$

となる．ここで, $\boldsymbol{a}$ は加速度, $\boldsymbol{F}$ は力である．比例定数にあたる m は物体の質量になる．なお, 物体の加速度 $\boldsymbol{a}$ は速度 $\boldsymbol{v}$ の時間変化率なので, t を時刻として (4.1) は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{4.2}$$

とも書かれる．さらに, 速度 $\boldsymbol{v}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の時間変化率なので (4.2) は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \tag{4.3}$$

とも書かれる．(4.1)–(4.3) は運動方程式と呼ばれる．

上で述べた Newton の第 2 法則（およびその数学的表現 (4.1)–(4.3)）は質量 m が時間に依存しない場合に正しい．質量が時間に依存する場合にも正しい法則は次のようになる:

Newton の第 2 法則 (一般の場合)

物体に外部から力が働くと物体の運動量が変化し, 物体の運動量の時間変化率は物体に働く力に等しい．

運動量は質量と速度の積

$$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v} \tag{4.4}$$

で定義される量であり[*1], 上の Newton の第 2 法則を具体的に数式で書き表すと

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}, \tag{4.5}$$

となる．運動量の定義を (4.5) に代入して整理すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= \boldsymbol{F}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

つまり, $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$ ならば, (4.6) は (4.3) に帰着される．

この講義では質量が変化するような場合を扱わない．そこで, (4.2) もしくは (4.3) の表現の第 2 法則で十分である．質量が変化するような場合としては, 燃料を消費しながら飛ぶロケットの運動や, 速度が光速に近い場合の物体の運動が挙げられる．

[*1] 運動量は物体の持つ運動の激しさや勢い, 物体が衝突したときの衝撃の大きさを表す一つの指標である．

■第 1 法則と第 2 法則の関係 ：

第 1 法則は第 2 法則から導くことができる．(4.2) において $\boldsymbol{F}=0$ とすると, $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0$ となる．一般に物体の質量はゼロではない ($m \neq 0$) ので, $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0$ は $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0$ を意味する．これは速度が時間に依存しない定数（大きさと向きが時間によって変化しないベクトル）, もしくはゼロであることを意味する．即ち, 物体に力が働いていなければ, 物体は一定の速度で運動し続けるか, 静止しているかのいずれかであり, 第 1 法則は第 2 法則から導かれることになる．

■質量の意味について ：

質量がそれぞれ m_1, m_2 ($m_1 > m_2$) である二つの質点 1 と 2 を考える．これらの質点に同じ力 $\boldsymbol{F}$ が作用して運動しているとする．このとき, 質点 1 と質点 2 の加速度をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ としたとき, 運動方程式より $m_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}$,（$i=1,2$）なので, $\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}/m_i$ を得る．仮定 $m_1 > m_2$ より, $|a_2| > |a_1|$ が導かれる．つまり, 質量の大きな物体 (今の場合, 質点 1) ほど加速されにくい．このことにより質量の大きさは加速のされ難さの程度（静止状態や一定速度の運動の状態の変え難さ, 即ち, 慣性の大きさ）を表すものと解釈することができる．

■次元と単位 ：

物理学に現れる量（物理量と呼ばれる）には（ほとんど必ず）次元と呼ばれるものを持っている．もしくは次元とは物理量に備わった性質ともいえる．力学における基本的な次元は長さ, 質量, 時間でそれぞれを記号で L，M，T と表す．その他の物理量の次元はこれら 3 つから導ける．速度 $\boldsymbol{v}$ の次元をしばしば括弧を使って $[v]$ と書く．このとき $[v]$ は基本的な次元を使うと $[v]=\mathrm{L}/\mathrm{T}$ であるし, 加速度 $\boldsymbol{a}$ の次元 $[a]$ は $[a]=\mathrm{L}/\mathrm{T}^2$, 力 $\boldsymbol{F}$ の次元 $[F]$ は $[F]=\mathrm{ML}/\mathrm{T}^2$ である．

方程式中の各項の次元は必ず等しくなければならない．さらに次元の等しいものどうししか足したり引いたりすることができない．また方程式の両辺の次元も一致していなければならない．

長さ, 時間, 質量の大きさを数値で表すときに用いられる単位にはいくつかのものがあり, 近年では MKS 単位系（もしくは SI 単位系）と呼ばれるものが標準的に採用されている．これは長さ, 質量, 時間をメートル (m), キログラム (kg), 秒 (s) で表す単位系である．MKS 単位系では力の単位は**ニュートン**と呼ばれ N で表され, $\mathrm{N}=\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ である．つまり, $1\,\mathrm{N}$ とは運動している $1\,\mathrm{kg}$ の物体の速さを 1 秒間に $1\,\mathrm{m/s}$ だけ加速させるのに必要な力である．

4.3 Newton の第 3 法則

Newton の第 3 法則

二つの物体が互いに力を及ぼしあう場合, 物体 1 が物体 2 に及ぼす力 $\boldsymbol{F}_{12}$ は, 物体 2 が物体 1 に及ぼす力 $\boldsymbol{F}_{21}$ と大きさは同じであるが向きは反対である.

この法則は「**作用・反作用の法則**」と呼ばれている.

演習問題[*2]

運動方程式を導入したので, 運動方程式を解いて簡単な物体の運動を考察してみよう. ここでは高等学校の物理基礎で扱った最も簡単な運動を例にとる.

1. 水平面上を何の力の作用も受けずに運動する質量 m の物体 (質点) を考える. この物体の任意の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を以下の設問に従って求めなさい.

   座標系の設定: 水平方向にデカルト座標系の x 軸をとる. 物体は水平面上を運動しているので, 物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i}$, 速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は $\boldsymbol{v}(t) = v(t)\boldsymbol{i}$ と表される. ここで, x は物体の位置座標 ($\boldsymbol{r}$ の x 方向成分), $\boldsymbol{i}$ はデカルト座標系の単位ベクトル, v は速度の x 方向成分である.

   初期条件: 物体は, $t = 0$ において, 座標系の原点 $\boldsymbol{r}(0) = 0$, $(x(0) = 0)$, に存在し, 速度は $\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{i}$, $(v(0) = v_0)$, であったとする.

   (a) 物体の運動を支配する運動方程式をベクトル形式で書きなさい. (質量 m と速度ベクトルの時間微分 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ に関する関係式を書きくだす.)

   (b) 運動方程式の x 成分が満たす式を書きなさい.(質量 m と速度ベクトルの時間微分の x 成分 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ に関する関係式を書きくだす.)

   (c) 前節問で得られた方程式を時間 t に関して積分することにより, 速度の x 方向成分 $v(t)$ を時間の関数として書き下しなさい.

   (d) 前設問で得られた速度の x 方向成分を時間 t に関して積分することにより, 物体の位置 $x(t)$ を t の関数として書き下しなさい.

[*2] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

第 5 章

一様な重力場中の質点の運動

前章で運動方程式が提示されたので, 本章を含むいくつかの章で具体的な力が与えられたときに運動方程式を解いて, その力の作用のもとでの物体の運動を考察してみよう.

5.1　目的, 理想化

地球上で起こる日常経験する物体の運動を考察する. 物体をもちろん質点と理想化して扱う. その他にも問題を簡単化するために, 以下で述べるいくつかの理想化を行う.

地球上の物体には, 地球による引力が働いている. この引力は**重力**と呼ばれている. 重力の大きさは物体の質量に比例し, その方向は地球の中心を向く方向である. 単位質量当たりの物体に働く重力を $\boldsymbol{g}$ と表す. $1\,\mathrm{kg}$ の物体に働く重力の大きさ $g(=|\boldsymbol{g}|)$ は地球の緯度, 経度, 高度に依存して変化することが知られている. しかしながら, 日常生活で経験する物体の運動がおこる範囲内では g は定数とみなしてよく, その大きさは $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ である[*1]

さらに, 日常生活で経験する物体の運動がおこる範囲内では地球が球である効果や地球が自転している効果を無視してよく, 物体の運動をデカルト座標系を用いて記述することにする. 重力のかかっている方向と平行な方向を**鉛直**方向 , 重力の向きと逆向きを**鉛直上向き**と定義するのが座標系の張り方の慣例である.

このように重力の大きさが一様な場合を, **一様な重力場中**と呼ぶ. 重力場の「場」とは物理用語で一般に時間と空間に依存した物理量を**場の量**と呼ぶ. 重力は時間には依存しないが, 空間に依存した場の量である. 「一様」とは物理学では空間に依存しないという性

[*1] 重力の大きさの変化は, 高度に伴う変化が緯度・経度にともなう変化よりも大きい. 赤道と極とでは重力の大きさは 0.5 % ほどしか変わらない. 一方, 高度 100 km の上空における重力の大きさは地上のその値に比べて 3 % ほど小さくなる. なお, 国際線の飛行機が飛ぶ高さは十数キロメートルである. これらのことから, 日常の生活圏で重力の大きさはほとんど一定とみなしてよいことがわかる. 正確な重力の大きさは, 国土地理院の WEB ページ `http://www.gsi.go.jp/`を通じて知ることができる.

質を指すときに使用する言葉である．本章では上で述べたように (時間にも) 空間にも依存しない重力が物体に作用している場合を考えるので, 章のタイトルを「一様な重力場」と記述している．

5.2　放物運動

5.2.1　問題設定

一様な重力場中を運動する質量 m の質点の運動を考察する．任意の時刻 t における質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ がわかれば問題は解けたことになる．質点の運動は簡単化のために鉛直 2 次元平面内で起こるとし, デカルト座標系の y 軸は鉛直上向き, y 軸に直角右向きに x 軸をとる．質点に働く力は重力のみとする．デカルト座標系での位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と速度 $\boldsymbol{v}$ の分解をそれぞれ,

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{v}(t) = v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j}$$

とする．ここで, x, y はそれぞれ位置ベクトルの x, y 成分, v_x, v_y はそれぞれ速度の x, y 成分, $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ はそれぞれ x, y 方向の単位ベクトルである．

時刻 $t = 0$ における物体の運動状態は**初期条件**と呼ばれる．ここでは $t = 0$ における物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(0)$ を座標系の原点, 即ち $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$, に設定する．さらに $t = 0$ における物体の速度, **初速度**, $\boldsymbol{v}(0)$, の大きさを V_0 とする．即ち, $|\boldsymbol{v}(0)| = V_0$ であり, 初速度 $\boldsymbol{v}(0)$ と x 軸とのなす角度を θ とする: $\boldsymbol{v}(0) = v_x(0)\boldsymbol{i} + v_y(0)\boldsymbol{j} = V_0 \cos\theta\,\boldsymbol{i} + V_0 \sin\theta\,\boldsymbol{j}$ である．

5.2.2　運動方程式

物体の運動を記述する運動方程式は, 今の問題設定では

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\boldsymbol{g} \tag{5.1}$$

である．ここで, $m \neq 0$ なので (5.1) の両辺を m で割り, さらにベクトルをデカルト座標系で分解すると

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} = -g\boldsymbol{j} \tag{5.2}$$

である.[*2] したがって, 運動方程式の x, y 方向の成分はそれぞれ

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0, \tag{5.3a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -g \tag{5.3b}$$

となる.

(5.3) のように微分を含んだ方程式は**微分方程式**と呼ばれる. 一般に, 微分方程式はその型によって解き方が知られている. (5.3) は最も簡単な微分方程式で単純に両辺を t で積分することで解を求めることができる.

先ず (5.3a) を解いてその解 $x(t)$ を求める. (5.3a) の両辺を t に関して不定積分すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C_1 \tag{5.4}$$

を得る. ここで, C_1 は不定積分に際して現れた任意定数 (積分定数) である. (5.4) の両辺をさらに t で不定積分して

$$x(t) = C_1 t + C_2 \tag{5.5}$$

を得る. ここで C_2 も不定積分に際して現れた任意定数 (積分定数) である. (5.5) が (5.3a) の解で**一般解**と呼ばれる. (5.5) のように任意定数を含む微分方程式の解は一般解と呼ばれる. 任意定数の値は初期条件によって決定される. 任意定数の個数と初期条件の個数は一致していないと, 任意定数の値は一意には決まらない. 任意定数の値を決める前に, (5.3b) の一般解を先に求めておく. 求め方は (5.5) を求める際に行ったやり方と全く同様で, (5.3b) の両辺を t に関して 2 回不定積分すればよい. その結果は

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4 \tag{5.6}$$

である. 再び, C_3, C_4 は任意定数である.

任意定数 C_1, C_2 を決定する. (5.5) において $t = 0$ とおく. さらに初期条件を考慮すると,

$$x(0) = C_2 = 0 \tag{5.7}$$

を得る. 同様に, $\boldsymbol{v}$ の x 成分 v_x は $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C_1$ なので, この式で $t = 0$ とおき, 初期条件を考慮すると

$$v_x(0) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = C_1 = V_0 \cos\theta \tag{5.8}$$

[*2] 地球の引力は鉛直下向きなので, $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{j}$ であることに注意する.

を得る.[*3] 以上をまとめると初期条件を満足する (5.3a) の解は

$$x(t) = V_0 \cos\theta\, t$$

である.

同様にして, (5.3b) の一般解に含まれる初期条件も $C_3 = V_0 \sin\theta$, $C_4 = 0$ と決まり, 最終的に初期条件を満足する (5.3b) の解は

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\theta\, t$$

である.

以上をまとめると, 一様重力場中において原点から初速度 $\boldsymbol{v}(0) = V_0 \cos\theta\, \boldsymbol{i} + V_0 \sin\theta\, \boldsymbol{j}$ で運動を始めた物体の運動は, 位置ベクトルの x, y 成分がそれぞれ

$$x(t) = V_0 \cos\theta\, t, \tag{5.9a}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\theta\, t, \tag{5.9b}$$

であり, 速度の x, y 成分がそれぞれ

$$v_x(t) = V_0 \cos\theta, \tag{5.10a}$$

$$v_y(t) = -gt + V_0 \sin\theta, \tag{5.10b}$$

である.

5.2.3　議論

運動方程式を数学的に解いただけでなく, 得られた解からわかる物体の運動の特徴について考察する.

運動方程式 (5.3a) から, 今の問題設定では x 方向には何の力が働いていなかった. この状況は Newton の第 1 法則が適用される状況である. 実際に得られた解 (5.10a) は時間 t に依存せず, 初速度の x 成分と同じ大きさの速度を表している. したがって, 得られた解は Newton の第 1 法則と無矛盾である.

質点の軌道を求めてみる. 質点の軌道は (5.9) から t を消去して x と y の関係式を求めることで得られる. (5.9a) から

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\theta} \tag{5.11}$$

---

*3 $\frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t}$ と $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}$ は同じ意味で, $x(t)$ を t に関して微分し, 微分した結果に $t = 0$ を代入するという意味である.

を得る．この式を (5.9b) に代入して整理すると

$$y = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta}x^2 + \tan\theta\, x \tag{5.12}$$

を得る．これは $y = ax^2 + bx + c$, (ここで, a, b, c は全て定数) の形をしているので放物線である．特に a に対応する量 $-\frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta}$ が負なので (5.12) は上に凸の放物線である．

物体が放物線の最高点に達する時刻, および最高点の高さを求めてみる．物体の速度は物体が放物線軌道の最高点に達する前は上向き $v_y > 0$, 放物線軌道の最高点に達した後は下向き $v_y < 0$ の速度で運動する．そこで, 放物線軌道の最高点では $v_y = 0$ である．(5.10b) より $v_y = 0$ となる時刻は

$$t = \frac{V_0\sin\theta}{g} \tag{5.13}$$

と求まる．さらに最高点の高さは (5.13) を (5.9b) に代入し

$$y = \frac{V_0^2\sin^2\theta}{2g} \tag{5.14}$$

となる．

物体が初期位置と同じ高さ $y = 0$ に戻ってくる時刻は, (5.9b) より

$$y = \left(-\frac{1}{2}gt + V_0\sin\theta\right)t = 0 \tag{5.15}$$

から $t = 0$ と

$$t = \frac{2V_0\sin\theta}{g} \tag{5.16}$$

である．前者の解（$t = 0$ の解）は初期条件が再び得られたことに対応し, 後者の解 (5.16) がいま求めるものである．この時刻は, 物体が放物線の最高点に達する時刻 (5.13) の 2 倍である．このことは理にかなっている．さらにこの時刻における x 座標, 即ち $y = 0$ が地面だと考えたときの物体の到達距離は

$$\begin{aligned} x &= V_0\cos\theta\left(\frac{2V_0\sin\theta}{g}\right) = \frac{2V_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} \\ &= \frac{V_0^2\sin 2\theta}{g} \end{aligned} \tag{5.17}$$

である．V_0 が一定のもとでこの距離を最大にするには $\sin 2\theta = 1$ となる θ を初期条件として物体を運動させればよい．その値は $2\theta = \pi/2$, 即ち $\theta = \pi/4$, つまり水平面と 45° の角度で物体を打ち出せばよい．

5.3　自由落下

前節の問題と同じ運動方程式に従うが, 初期条件だけが異なる別の運動を考えてみよう.

5.3.1　問題設定

5.2 節と同じ問題設定で, 一様な重力場中を運動する質量 m の質点の運動を考察する. 質点の運動は簡単化のために鉛直 2 次元平面内で起こるとし, デカルト座標系の y 軸は鉛直上向き, y 軸に直角右向きに x 軸をとる. 物体に働く力は重力のみとする.

初期条件が 5.2 節とは異なり, $\boldsymbol{r}(0) = L\boldsymbol{i} + H\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}(0) = 0$ とする. 即ち, 重力の影響のみを受けて, 原点からある水平距離 L, 高さ H のところを出発点にして初速度 0 で落下する物体の運動を考察する. このような問題は**自由落下問題**とも呼ばれている.

5.3.2　運動方程式

物体の運動を記述する運動方程式は, 今の問題設定では (5.1) と同じで, したがってその一般解も同じである:

$$x(t) = C_1 t + C_2, \tag{5.18a}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4. \tag{5.18b}$$

ここで C_1, C_2, C_3, C_4 は任意定数である. 初期条件を考慮して, これらの任意定数を決定すると

$$C_1 = C_3 = 0,\ C_2 = L,\ C_4 = H$$

を得る. 即ち, 初期条件を満足する運動方程式の解は

$$x(t) = L, \tag{5.19a}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H \tag{5.19b}$$

となる. 今の問題設定は, x 方向には第 1 法則が成り立つ場合で, しかも初速度 0 なので, 質点は $x = L$ のところに居続ける. 一方, y 方向には重力の作用を受けて落ちていく.

5.4　モンキーハンティング

これまでに議論してきた放物運動と自由落下を同時に考えてみる.

5.2, 5.3 節と同じ問題設定で, 一様な重力場中を運動する 2 つの質点（質量 m_1 の質点 1 と質量 m_2 の質点 2）の運動を考察する. 質点の運動は簡単化のために鉛直 2 次元平面内で起こるとし, デカルト座標系の y 軸は鉛直上向き, y 軸に直角右向きに x 軸をとる. 物体に働く力は重力のみとする.

初期条件は質点 1 に関しては 5.2 節とおなじ, 質点 2 については 5.3 節と同じとする. ただし,

$$\tan\theta = H/L \tag{5.20}$$

とする.

質点 1 はハンターが打つ弾丸を, 質点 2 はハンターの標的のサルで, ハンターがサルをめがけて弾を打ったと同時に木の上にいたサルが自由落下を始める, というような設定である. 果たして弾をサルに当てるにはどのようにしたらいいであろうか.

初期条件を満足する運動方程式の解[*4]は, これまでの解を参照すると

$$x_1(t) = V_0 \cos\theta t, \tag{5.21a}$$
$$y_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\theta t, \tag{5.21b}$$

$$x_2(t) = L, \tag{5.22a}$$
$$y_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H \tag{5.22b}$$

である.

質点 1 と 2 が衝突するためには, 2 つの質点の x 座標が一致する $(x_1 = x_2)$ 必要がある. そこで

$$V_0 \cos\theta t = L$$

より質点 1 が L に到達する時刻

$$t = \frac{L}{V_0 \cos\theta} \tag{5.23}$$

が求まる. この時刻における質点 1 と 2 の y 座標を求めてみる.

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{L}{V_0\cos\theta}\right)^2 + V_0\sin\theta\left(\frac{L}{V_0\cos\theta}\right) \\ &= -\frac{gL^2}{2V_0^2\cos^2\theta} + L\tan\theta. \end{aligned} \tag{5.24}$$

[*4] 位置ベクトルの成分 x, y に付く下付きの添え字は質点の番号を表す. 例えば x_1, y_1 は質点 1 の位置ベクトルの x, y 成分である.

いっぽう,

$$
\begin{aligned}
y_2 &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{L}{V_0\cos\theta}\right)^2 + H \\
&= -\frac{gL^2}{2V_0^2\cos^2\theta} + H.
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

ここで (5.20) を考慮すると $y_1 = y_2$ となる．即ち, 質点 1 と 2 は (5.23) の時刻において必ず衝突するのである.

■議論　なぜ衝突するのか．もし重力が働いていなければ[*5], 質点 2 は静止したままで, 質点 1 は 2 に向かう直線軌道をたどるので衝突する．(5.24), (5.25) の右辺第 2 項が一致するのはそのためである．一方, 重力が働いているときには, 質点 1 の軌道は, 重力が働いていないときの軌道 (**慣性軌道**と呼ばれる), 即ち直線軌道, からずれる．そのズレは (5.24) の右辺第 1 項で表される．一方, 質点 2 の慣性軌道, 即ち静止状態, からのズレは (5.25) の右辺第 1 項で表される．この 2 つのズレが一致しているのである．より一般的には, 一様重力場中における慣性軌道のズレは, 初期条件にかかわらず鉛直方向に $-\frac{1}{2}gt^2$ である．つまり鉛直方向の慣性軌道からのズレは, 質点 1, 2 の両方で任意の時刻で同じなのである.

[*5] $g = 0$ と設定して解を眺めてみる.

演習問題[*6]

運動方程式を導入したので, 運動方程式を解いて簡単な物体の運動を考察してみよう. ここでは高等学校の物理基礎で扱った最も簡単な運動を例にとる.

1. 重力加速度の大きさが g で表される一様な重力の作用のみを受けて運動する質量 m の物体 (質点) を考える. この物体の任意の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を以下の設問に従って求めなさい.

   座標系の設定: 鉛直上向きにデカルト座標系の y 軸をとり, y 座標の向かって右向きに x 軸をとる. 物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$, 速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は $\boldsymbol{v}(t) = v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j}$ と表される. ここで, x と y はそれぞれ物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の x, y 方向成分, $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ はそれぞれデカルト座標系の x, y 方向の単位ベクトル, v_x と v_y はそれぞれ速度 $\boldsymbol{v}$ の x, y 方向成分である.

   初期条件: 物体は $t = 0$ において, 高さ H, 即ち $\boldsymbol{r}(0) = H\boldsymbol{j}$, $(x(0) = 0, y(0) = H)$, に存在し, 速度はゼロ, 即ち $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{0}$, $(v_x(0) = 0,\ v_y(0) = 0)$, であったとする.

   (a) 単位質量の物体に働く重力を $\boldsymbol{g}$ と表すことにする. このとき, 物体の運動を支配する運動方程式をベクトル形式で書きなさい. (質量 m と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の時間微分 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$, 重力 $\boldsymbol{g}$ の間に成り立つ関係式を書きくだす.)

   (b) 運動方程式の各成分が満たす式を書きなさい.

   (c) 前節問で得られた方程式を時間 t に関して積分することにより, 速度の x, y 方向成分 $v_x(t)$, $v_y(t)$ を時間の関数として書き下しなさい.

   (d) 前設問で得られた速度の x, y 方向成分を時間 t に関して積分することにより, 物体の位置 $x(t)$, $y(t)$ を t の関数として書き下しなさい.

[*6] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

第 6 章

調和振動子（その１）：バネに繋がれたおもりの振動

時間発展が三角関数で表されるような振動は**単振動**もしくは**調和振動**と呼ばれ, そのような系は**調和振動子**と呼ばれる. この章と引き続く章では, 調和振動子を考察する. 調和振動の例としては,

1. バネに繋がれたおもりの運動（ただし, 振動の振れ幅が小さい場合）
2. 振り子の運動（ただし, 振り子の振れ幅が小さい場合）

が挙げられる.

バネに繋がれたおもりや振り子の運動（振動現象）は日常的によく目にする現象なので, 素朴な興味としてそれらの運動を物理学で取り扱うことはごく自然であろう. しかしながら, これらを物理学において考える意義は他にもある. 物理学では自然現象を理想化し, 簡単な模型（**モデル**）を構築して, それを調べることによって自然現象を理解しようとする. 周期的に振動する現象は自然界に多くあり, そのような現象を理解するための一つのモデルとして調和振動子が使われるのである.

この章ではさらに, **線形**, **重ね合わせ**といった物理学において重要な概念も導入される.

6.1　問題設定

摩擦のない水平な[*1]テーブルの上にある質量 m の質点の運動を考察する. 水平方向にデカルト座標系の x 軸をとる. 質点の運動は x 方向のみの 1 次元問題とする. 質点にはバネ定数 k の線形バネがつながれていて, 質点にはバネの復元力のみが働いているとす

[*1] 重力の方向に対して垂直な平面.

る．バネの自然長（バネが伸びも縮みもしていないときの長さ）を座標の原点とする．このとき, 質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ を $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i}$ とデカルト座標系で分解したときの変位 $x(t)$ は, $x > 0$ のときはバネが伸びている状態を, $x < 0$ のときはバネが縮んでいる状態を表す．先ず, 変位 x を t の関数として求めることが当面の目標である (図 6.1 参照.)

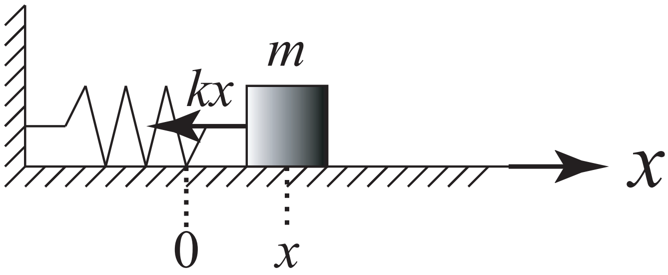

図 6.1　バネ定数 k の線形バネに繋がれた質量 m のおもりの運動．図は自然長からバネが x だけ伸びた状態を表しており, このときバネの復元力は x 軸の負の方向（変位と逆向き）で, バネは元の長さに戻ろうする．

6.2　言葉の定義

バネ定数 k の線形バネが質点に及ぼす復元力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = -kx\,\boldsymbol{i} \tag{6.1}$$

と表される．ここで $k > 0$ である．つまり力の大きさは質点の変位に比例し, (6.1) の負符号は力の向きが変位と逆向きであることを示している．バネ定数 k はバネの堅さに対応する．堅いバネは同じ変位に対して強い復元力が生じることが想像できるだろう．実際に (6.1) によると同じ変位 x に対して k が大きいほど復元力の大きさ $|\boldsymbol{f}| = k|x|$ は大きくなる．

(6.1) のような力と変位の間の関係は **Hooke の法則**とも呼ばれる.[*2]

[*2] 一般にバネの及ぼす力は, 変位 x の複雑な関数であろう．$\boldsymbol{F} = F(x)\,\boldsymbol{i}$ としたとき, $F(x)$ を $x = 0$ 近傍で Taylor 展開する:

$$F(x) = F(0) + \frac{\mathrm{d}F(0)}{\mathrm{d}x}x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2F(0)}{\mathrm{d}x^2}x^2 + \ldots. \tag{6.2}$$

$F(0)$ は自然長のときの復元力で, それはゼロであろう．$\mathrm{d}F(0)/\mathrm{d}x = -k$, であり変位の高次の項（$x^2$ の以上の項）, は存在するであろうが, x が小さいとき, すなわち質点の変位が小さいときには x の高次の項は無視することができ, (6.1) が成り立つ．

6.3 初期条件

初期条件は $\boldsymbol{r}(0) = x(0)\boldsymbol{i} = A\,\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v}(0) = v_x(0)\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$ とする．即ち, A だけ変位させ, 速度ゼロで運動が始まる設定である．(成分が満足する初期条件は $x(0) = A$, $v_x(0) = 0$ である.)

6.4 運動方程式

以上の問題設定では, 質点の運動方程式はベクトル形式で

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -kx\,\boldsymbol{i} \tag{6.3}$$

となる．運動方程式の x 成分は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{6.4}$$

である．ここで $k > 0$, $m > 0$ なので (6.4) を m で割り,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x \tag{6.5}$$

を得る．ここで

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m} \tag{6.6}$$

と定義した．(6.5) がいま解くべき微分方程式である．(6.5) は一様な重力場中の運動方程式（微分方程式）のように単純に積分するだけでは解は求められない.[*3] まず, (6.5) を解く前にそれが持つ性質を議論しておく.

6.5 線形微分方程式の性質: 線形, 重ね合わせ

ある微分方程式が次の 2 つの性質を持つとき, その微分方程式は**線形微分方程式**と呼ばれる：

1. ある微分方程式が 2 つの独立な解, x_1 と x_2, を持つとき,[*4] $x_1 + x_2$ もその微分方程式の解になっている.

[*3] (6.5) を単純に 2 回積分すると, $x(t) = -k\int\left(\int x\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}t$ となる．この問題では x を t の関数として求めたいのであるが, 右辺の積分は x が t のどのような関数であるかを知らなければ積分は実行できない. つまり, (6.5) を単純に積分しただけでは (6.5) の解は求められない.

[*4] $x_1 \neq x_2$ であり, x_1 は x_2 の定数倍ではないことを指す.

2. ある微分方程式の解を定数倍したものも, その微分方程式の解になっている.

実際に, (6.5) が上記の 2 つの性質を持っていることを確かめてみる. 先ず, x_1 と x_2 はそれぞれ (6.5) の解であるので,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x_1, \quad \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x_2$$

を満たす. そこで,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2(x_1+x_2)}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} \\ &= -\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 \\ &= -\omega^2(x_1+x_2) \qquad (6.7)\end{aligned}$$

となり, 確かに $x_1 + x_2$ は (6.5) の解になっている. さらに, c を任意定数として, cx が (6.5) の解になっていることは

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2(cx)}{\mathrm{d}t^2} &= c\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \qquad (6.8) \\ &= c \times (-\omega^2 x) \\ &= -\omega^2(cx) \qquad (6.9)\end{aligned}$$

であることから確かめられる. つまり, (6.5) は線形微分方程式である.

上記の 1 と 2 の性質は次のように 1 つの文章にまとめられる:

線形微分方程式と解の重ね合わせ

ある微分方程式が独立な解, x_1 と x_2, を持つとき, c_1 と c_2 を任意定数として $c_1x_1 + c_2x_2$ もその微分方程式の解になっていれば, その微分方程式は**線形微分方程式**と呼ばれ, $c_1x_1 + c_2x_2$ は解の**重ね合わせ**と呼ばれる.

線形微分方程式はいくつかの特有の形を持ち, その形に応じて解析的に解く方法[*5]が知られている. 一方, 線形でない微分方程式は**非線形微分方程式**と呼ばれ, それらが解ける例は限られている. 一般的には非線形微分方程式は解析的には解けない. 大学の授業で扱う微分方程式は, ほとんどの場合, 線形微分方程式である.

[*5] 手で解ける方法, 初等関数で解を表現する方法.

6.6　運動方程式の解：線形微分方程式の解法

(6.5) を解くには, それが線形微分方程式であるという性質を用いる. 独立な 2 つの解を見つければ, それらを重ね合わせれば, 解を構成できるのである. その解は, 任意定数を含むので一般解である.

ここでは**推定法**[*6]と呼ばれる方法で (6.5) の 2 つの独立な解を見つけてみる. (6.5) の解を

$$x = e^{\lambda t} \tag{6.10}$$

と推定する. (6.10) を (6.5) に代入し, 非自明な解[*7] ($x \neq 0$) が満たす条件を求めると,

$$\lambda^2 = -\omega^2,$$

もしくは

$$\lambda = \pm i\omega, \tag{6.11}$$

を得る. つまり, (6.11) を (6.10) に戻すと, $x_1 = e^{i\omega t}$ と $x_2 = e^{-i\omega t}$ という 2 つの独立な解が見つかった. (6.5) は線形の微分方程式なので, これらを重ね合わせた

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \tag{6.12}$$

も (6.5) の解である. ここで c_1, c_2 は任意定数である. この解は任意定数を含むので, (6.5) の一般解である.

初期条件を満足するように c_1, c_2 を決定する. 初期位置 $x(0) = A$ より

$$x(0) = c_1 + c_2 = A, \tag{6.13}$$

さらに (6.12) を t に関して微分したものは速度の x 方向成分 v_x である:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = i\omega\left(c_1 e^{i\omega t} - c_2 e^{-i\omega t}\right). \tag{6.14}$$

この式に $t = 0$ を代入し, さらに初速度はゼロ（$v_x(0) = 0$）であることを考慮すると

$$v_x(0) = i\omega(c_1 - c_2) = 0, \tag{6.15}$$

[*6] この呼び方は, 私が大学 1 年生の時に受講した「物理数学」の授業で登場した. この呼び方は, 方法をよく表しているのだが, 一般的には通用しないので, 使用する際には注意が必要である.

[*7] 任意の時刻で $x = 0$ となる解は確かに微分方程式 (6.10) の解になっているが, このような解は当たり前の解, もしくはつまらない解, であり自明な解と呼ばれる. 一方自明でない解は非自明な解と呼ばれる.

を得る. これらから,

$$c_1 = c_2 = \frac{A}{2}, \tag{6.16}$$

が得られ, これらを (6.12) に代入して Euler の公式を使用して整理すると, 初期条件を満足する (6.5) の解が得られる:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{A}{2}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + \frac{A}{2}(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\ &= A\cos\omega t. \end{aligned} \tag{6.17}$$

6.7 解の性質

(6.17) において $|A|$ は**振幅**と呼ばれる. なぜならば余弦関数 $\cos\theta$ は ± 1 の範囲に収まるので, (6.17) で表される質点の運動は変位の絶対値が $|A|$ の範囲に収まるからである. さらに余弦関数は 2π 周期（$\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi)$）であることから, 次のような時刻 T が存在するはずである:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega t \\ &= A\cos(\omega t + 2\pi) \\ &= A\cos[\omega(t+T)] \\ &= x(t+T). \\ \therefore \quad & \omega T = 2\pi. \end{aligned} \tag{6.18}$$

つまり, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ だけ時間が経つと質点の変位は元に戻る. この T は**周期**と呼ばれる. ω は**角振動数**と呼ばれる.[*8] 1 周期 T だけ時間が経つと, 振動が 1 回終わるので, 逆に 1 秒間の振動の回数は $1/T = \omega/(2\pi)$ で与えられるからである.

この問題で見たように調和振動子の振動の周期 $T(= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}})$ や振動数 $\omega(= \sqrt{\frac{k}{m}})$ は振幅 $|A|$ に依存しない. Hooke の法則が成り立つ範囲であれば, 初期振幅をどのように選ぼうと振動の周期は変わらない（質点の質量 m とバネの堅さ k によって決まる）のである. この性質は, 調和振動子の最も重要な性質である. 実際に異なる初期条件のもとで問題を解いてこのことを確かめてみよう (演習問題参照).

6.8 議論

運動方程式を解いて得られた解の性質をもう少し議論してみる.

[*8] 単に振動数とも呼ばれる.

先ず, (6.17) を t に関して微分すると速度の x 方向成分 $v_x(t)$ が得られる:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega \sin \omega t. \tag{6.19}$$

三角関数は $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ という性質を満足することから, (6.17) と (6.19) より

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = \left(\frac{v_x}{A\omega}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1 \tag{6.20}$$

を得る. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ に注意し, 上式の中辺と右辺を変形すると

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \tag{6.21}$$

となることがわかる. 上式は, 左辺の量が時間に因らず初期条件で決まったある一定の値 $\frac{1}{2}kA^2$ に常に保たれていることを示している. 物理学では時間に依存しない量は**保存量**と呼ばれる. (6.21) は $\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$ が保存量であることを述べている. この量は今考えた初期条件と異なる初期条件のもとでの解でも, 保存量になっている (演習問題参照). 後で見るように, この量はエネルギーと呼ばれるものである.

演習問題[*9]

1. 実数 t の関数 $x(t)$ が従う次のような微分方程式は, 物理学の問題でよく現れる形のものである:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Bx = 0. \tag{6.22}$$

ここで A, B は定数である. (6.22) は, **定数係数の 2 階線形微分方程式**と呼ばれるものである. 微分方程式に含まれる微分の階数は 2 階微分 (左辺第 1 項) が最高階なので「2 階...」と呼ばれる.[*10] さらに, 係数の A, B が定数であることから, 「定数係数の...」と呼ばれる.

(6.22) が線形微分方程式であることを確かめなさい. (ヒント : x_1, x_2 が (6.22) の独立な解だと仮定したとき, c_1, c_2 を任意定数として $c_1x_1 + c_2x_2$ も (6.22) の解になっていることを確かめる.)

2. 授業で扱った単振動の問題を演習問題として解いてみよう. ただし, 授業とは異なる初期条件を設定する.

摩擦のない水平なテーブルの上にある質量 m の質点の運動を考察する. 質点にはバネ定数 k の線形バネがつながれていて, 質点にはバネの復元力のみが働いているとする. 水平方向にデカルト座標系の x 軸をとる. 質点の運動は x 方向のみの 1 次元問題とする. バネの自然長を座標の原点とする. このとき, この物体の任意の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を以下の設問に従って求めなさい.

(a) 物体の運動を支配する運動方程式をベクトル形式で書きなさい. (質量 m と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$, 復元力の間に成り立つ関係式を書きくだす.)

(b) 運動方程式の x 成分が満たす式を書きなさい.

(c) 前節問で得られた方程式を解いて, 一般解を求めなさい.

(d) 前設問で得られた $x(t)$ に含まれる任意定数を初期条件を利用して決定し, 初期条件を満たす運動方程式の解 $x(t)$ と $v_x(t)$ を求めなさい.

(e) この振動運動の振幅と周期を答えなさい.

(f) 得られた解から $\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$ が時間に依存せず, 初期条件のみに依存することを示しなさい.

[*9] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

[*10] 因みに, 左辺第 2 項は x の 1 階微分, 左辺第 3 項は 0 階微分である.

第 7 章

調和振動子（その 2）：振り子の運動

調和振動子の別の例として, 振り子の運動を考察する．振り子の振れ角が小さい範囲に留まっている場合[*1]には, 振り子の運動も前節と同じ形の運動方程式によって支配される．したがって, このような場合では振り子の運動も単振動である．

一様重力場中の物体の運動やバネに繋がれた物体の運動ではデカルト座標系を用いて現象を記述してきた．しかしながら, 振り子の運動には極座標系を用いるほうが便利である．そこでこの節では 2 次元極座標系の導入も行う．

7.1 問題設定

伸び縮みしない質量の無視できる長さ l の紐の片端に, 質量 m の質点がむすびつけられており, 鉛直 2 次元平面内において, 紐のもう一方の端を支点とした紐のたるみがない状態で起こる質点の運動を考察する．座標の原点 O を支点にとり, 鉛直下向きをデカルト座標系の x 軸の正の方向, それと垂直左向きに y 軸の正の方向をとる．質点に働いている力は, 紐の張力 $\boldsymbol{T}$ と重力のみとする (図 7.1 参照).

質点の運動は, 支点 O を中心とする半径 l の円の円弧の一部を軌道とするような運動となることが予測される．このような運動を考察するのに便利な座標系は, 次節で説明する 2 次元極座標系である．

7.2 2 次元極座標系

振り子の問題からいったん離れて, 2 次元平面内を自由に運動する質点を考える．ある瞬間における質点の位置を点 P とする．座標の原点を O とし, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向は**動径方向**, 動径方向と直角左向きは**方位角方向**と呼ばれる．動径方向の距離を $r \equiv |\mathrm{OP}|$, 単位ベクトルを

[*1] 微小振幅と呼ばれる場合

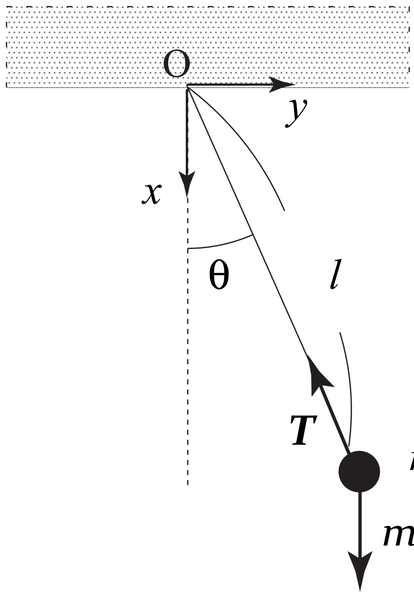

図 7.1　伸びない長さ l のひもの一端に繋がれた質量 m の物体が鉛直面内において紐のたるみがない状態で運動する様子．鉛直方向からのひもの振れ角を θ とする．

$\boldsymbol{e}_r$ と表す．OP と x 軸のなす角を方位角といい，それを θ で表し，方位角方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\theta$ とする．定義により $r > 0$ であり，$\theta > 0$ は反時計回りの回転角，$\theta < 0$ は時計回りの回転角を表す (図 7.2 参照)．

2 次元極座標系は r と θ を使って空間中の点の位置を表す座標系である．デカルト座標系との大きな違いは，2 次元極座標系の単位ベクトルの向きは時間と共に変わることである．ある瞬間における質点の位置を基準にして動径方向と方位角方向を決めているので，時間がたって質点の位置が変わると，デカルト座標系に対して動径方向と方位角方向の向きが変わることが想像できるであろう (図 7.2 参照)．つまり，2 次元極座標系の単位ベクトルは時間の関数である: $\boldsymbol{e}_r(t)$, $\boldsymbol{e}_\theta(t)$.

2 次元極座標系における運動方程式を導くための準備をする．質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は 2 次元極座標系で分解すると，定義により

$$\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{e}_r \tag{7.1}$$

である．運動方程式を 2 次元極座標系において分解するためには，$\boldsymbol{r}$ の時間に関する 2 階微分 $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ の 2 次元極座標系における分解が必要である．それを計算するためには，2 次元極座標の単位ベクトルの時間微分 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$ に関する関係式が必要である．以下では，幾何学的にそれを求めてみる．　計算による求め方は，演習問題として (解答例付きで) 章末に用意されている．

ある時刻 t における質点の位置を P, $t+\Delta t$ における質点の位置を P’ とする．$|\mathrm{OP}| = r$,

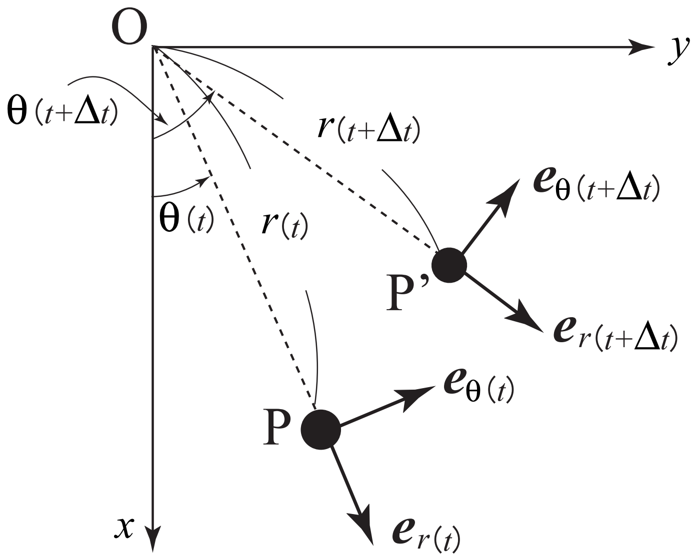

図 7.2　2 次元極座標の単位ベクトル．動径方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$ と方位角方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\theta$ は時間と共に向きが変わる．

$|\mathrm{OP'}| = r + \Delta r$, $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ から反時計回りに $\Delta\theta(\equiv \theta(t+\Delta t) - \theta(t))$ だけ回転しているとする．このとき, $\boldsymbol{e}_r$ の時間微分は微分の定義と $\boldsymbol{e}_r(t)$, $\boldsymbol{e}_r(t+\Delta t)$ の幾何学的関係を考慮すると

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r(t)}{\mathrm{d}t} &\equiv \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{e}_r(t+\Delta t) - \boldsymbol{e}_r(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\theta \boldsymbol{e}_\theta(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} \boldsymbol{e}_\theta(t) \\
&= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned} \tag{7.2}$$

となる (図 7.3 参照)．第 1 式から, 第 2 式への変形は $\boldsymbol{e}_r(t+\Delta t) - \boldsymbol{e}_r(t)$ はベクトルであり, その大きさは $\boldsymbol{e}_r(t+\Delta t)$ と $\boldsymbol{e}_r(t)$ とが角度 $\Delta\theta$ だけズレていることから, ($\Delta t \to 0$ の極限で) 半径が 1 で中心角が $\Delta\theta$ の円弧の長さに等しい．さらに, $\boldsymbol{e}_r(t+\Delta t) - \boldsymbol{e}_r(t)$ の向

きは ($\Delta t \to 0$ の極限で)$\boldsymbol{e}_\theta$ 方向であることからきている．同様にして

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta(t)}{\mathrm{d}t} &\equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{e}_\theta(t+\Delta t)-\boldsymbol{e}_\theta(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta\times(-\boldsymbol{e}_r(t))}{\Delta t} \\
&= -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{\Delta t}\boldsymbol{e}_r(t) \\
&= -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r(t)
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

を得る．

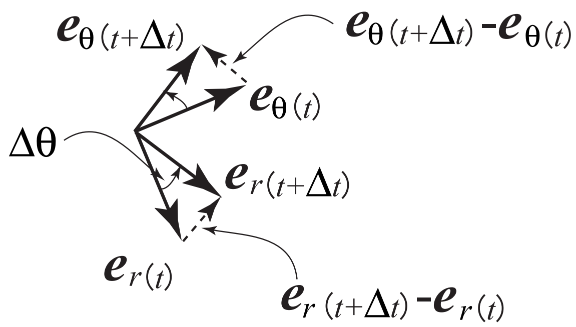

図 7.3　2 次元極座標の単位ベクトルの変化. 単位ベクトルの微分を考えるために, 異なる時刻における単位ベクトルの始点を合わせて描いている.

以上の関係式を考慮すると, 速度と加速度の 2 次元極座標系における分解が求められる. 先ず, 速度 $\boldsymbol{v}$ の 2 次元極座標系における分解を

$$\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

と表す．v_r, v_θ はそれぞれ速度 $\boldsymbol{v}$ の動径方向, 方位角方向成分である．一方, 速度は位置ベクトルの時間微分であることから

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}(r\boldsymbol{e}_r)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta.
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

つまり,

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \tag{7.5a}$$

$$v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{7.5b}$$

である．

次に, 加速度 $\boldsymbol{a}$ の 2 次元極座標における分解を

$$\boldsymbol{a} = a_r \boldsymbol{e}_r + a_\theta \boldsymbol{e}_\theta$$

と表す. a_r, a_θ はそれぞれ加速度 $\boldsymbol{a}$ の動径方向, 方位角方向成分である. 一方, 加速度は速度の時間微分であることから

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_r + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_\theta + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} \\
&= \left\{\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\boldsymbol{e}_r + \left\{2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right\}\boldsymbol{e}_\theta \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

である. つまり,

$$a_r = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2, \qquad (7.7\mathrm{a})$$

$$a_\theta = 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \qquad (7.7\mathrm{b})$$

である.

7.3 運動方程式

問題設定に従って運動方程式をたて, それを 2 次元極座標系で分解する. 紐の張力 $\boldsymbol{T}$ は 2 次元極座標で分解すると

$$\boldsymbol{T} = -T\boldsymbol{e}_r, \qquad (7.8)$$

ここで $T > 0$ である. 重力を 2 次元極座標で分解すると

$$\boldsymbol{g} = g\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r - g\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta, \qquad (7.9)$$

である. したがってベクトル形式の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} \qquad (7.10)$$

を 2 次元極座標で分解すると, 紐は伸びないので $r = l$(一定), $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = 0$ に注意して

$$m\left[-l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\boldsymbol{e}_r + l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_\theta\right] = (-T + mg\cos\theta)\,\boldsymbol{e}_r - mg\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta, \qquad (7.11)$$

となる. 動径方向成分, 方位角方向成分の運動方程式はそれぞれ

$$-ml\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -T + mg\cos\theta, \qquad (7.12\mathrm{a})$$

$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\sin\theta, \qquad (7.12\mathrm{b})$$

である．動径方向には質点は動いていない (常に $r=l$ の位置にある)．それゆえ質点に働いている力は動径方向には釣り合っている筈である．実際に (7.12b) の式を

$$
\begin{aligned}
&ml\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - T + mg\cos\theta \\
=&\frac{mv_\theta^2}{r} - T + mg\cos\theta = 0
\end{aligned}
$$

と変形すると, 第 1 項は遠心力 (動径方向正の方向), 第 2 項は紐の張力 (動径方向負の方向), 第 3 項は重力の動径方向成分 (動径方向正の方向) であり, これらの和がゼロになっていることがわかる．(7.12b) を解いて, $\theta(t)$ を求めて (7.12a) に代入すると張力 T が決まる.*2 そこで, (7.12b) が解くべき微分方程式である．上で見てきたように, 振り子の問題を極座標を使って扱うと, 問題は θ に関する 1 次元問題になる．これが振り子の運動を極座標系を用いて記述する大きな理由である.

7.4　微小振幅振動

前節で導いた振り子の運動方程式 (7.12b) は非線形の微分方程式である．なぜならば, 例えば (7.12b) の解 θ の定数倍は解ではないからである:

$$
\begin{aligned}
l\frac{\mathrm{d}^2(c\theta)}{\mathrm{d}t^2} &= cl\frac{\mathrm{d}^2(\theta)}{\mathrm{d}t^2} \\
&= c\times(-g\sin\theta) \\
&\neq -g\sin(c\theta).
\end{aligned}
\tag{7.13}
$$

ここで, c は任意定数である．(7.12b) は解ける非線形微分方程式の 1 つの例で, 解は楕円関数と呼ばれるもので表現できることが知られている．しかしながら, ここではこの微分方程式を解くことは考えず, 振り子の振幅が小さい場合 (微小振幅振動) を考えることにする．$|\theta| \ll 1$ のときには正弦関数は

$$
\sin\theta \simeq \theta \tag{7.14}
$$

と近似することができるので, このときには (7.12b) は次のように近似できる:

$$
l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\theta. \tag{7.15}
$$

*2 張力 $\boldsymbol{T}$ はあらかじめその値が与えられているわけではなく, 運動方程式から然るべく決められるのである.

これは, 前節で議論したバネ定数 k の線形バネに繋がれたおもりが従う運動方程式と数学的に同じ形である:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta, \tag{7.16}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{7.17}$$

例えば, 初期条件 $\theta(0) = \theta_0$, $\frac{\mathrm{d}\theta(0)}{\mathrm{d}t} = 0$ を満たす (7.16) の解は $\theta(t) = \theta_0 \cos\omega t$ であり, 振動の周期 T は $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$ で与えられて, T は初期振幅 θ_0 には依存しないことがわかる. 振り子のこのような性質は振り子の等時性と呼ばれ, Galileo が発見した性質である.

7.5　Taylor 展開

(7.14) の近似をより一般的な立場, Taylor 展開もしくは Maclaurin 展開とも呼ばれる関数の近似法, から議論する.

無限階微分可能な任意の関数 $f(x)$ は $x = a$ の周りで

Taylor 展開

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}(x-a) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 f(a)}{\mathrm{d}x^2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n f(a)}{\mathrm{d}x^n}(x-a)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n f(a)}{\mathrm{d}x^n}(x-a)^n \end{aligned} \tag{7.18}$$

と書ける. (7.18) は $f(x)$ の $x = a$ の周りの **Taylor 展開**と呼ばれる. (7.18) において $a = 0$ の場合は特別に **Maclaurin 展開**と呼ばれる. 以下では Maclaurin 展開も含めて Taylor 展開と呼ぶことにする. $\frac{\mathrm{d}^n f(a)}{\mathrm{d}x^n}$ は $f(x)$ を x に関して n 回微分し, その結果に $x = a$ を代入する, という意味である.

Taylor 展開は, 任意の関数を n 次多項式で近似することを意味している. 例えば, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{7.19}$$

と表現したとする. ここで, c_n は x に依存しない定数である. このとき, c_n をどのように選んだらよいであろうか. $x = a$ を両辺に代入すると $c_0 = f(a)$ を得る. 次に, (7.19) の両辺を x で 1 階微分して, その結果に $x = a$ を代入すると, $c_1 = \frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}$ を得る. さらに (7.19) の両辺を x で 2 階微分して, その結果に $x = a$ を代入すると, $c_2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f(a)}{\mathrm{d}x^2}$ を得

る．このように次々に両辺を微分して $x=a$ を代入すると，c_n が決まり，最終的に (7.18) が導ける．

代表的な関数の $x=0$ の周りの Taylor 展開をいくつか書き下しておく:

- 指数関数：e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots . \tag{7.20}$$

指数関数と指数関数の $x=0$ の周りの Taylor 展開を図 7.4 に示す．Taylor 展開は，展開を x の 1 次まで，2 次まで，3 次までで打ち切った場合を示している．$x=0$ の近傍で Taylor 展開がもとの関数をよく近似しており，展開の次数が高くなればより近似が良くなることが見て取れる．正弦関数，余弦関数の場合も同様である．

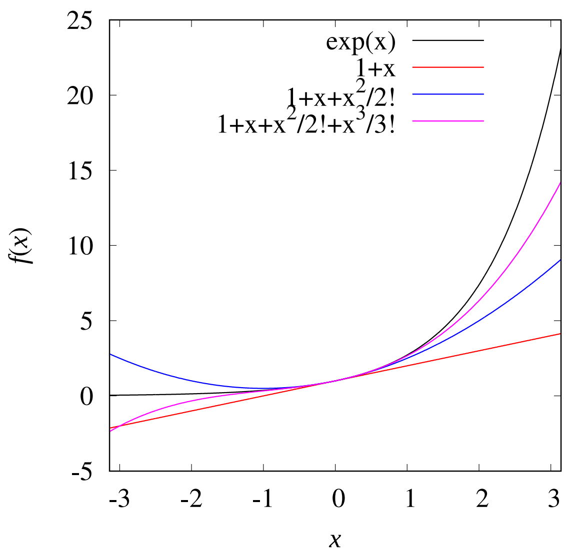

図 7.4　指数関数 (黒実線) とその Taylor 展開の比較．指数関数の Taylor 展開を x の 1 次までで打ち切った場合（赤実線），x の 2 次までで打ち切った場合（青実線），x の 3 次までで打ち切った場合（紫実線）を示している．

- 正弦関数：$\sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots . \tag{7.21}$$

正弦関数と正弦関数の $x=0$ の周りの Taylor 展開を図 7.5 に示す．Taylor 展開は，展開を x の 1 次まで，3 次まで，5 次までで打ち切った場合を示している．

- 余弦関数：$\cos x$

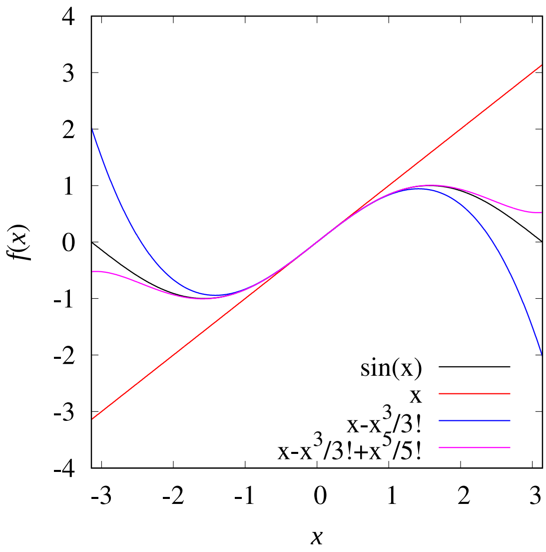

図 7.5 正弦関数 (黒実線) とその Taylor 展開の比較. 正弦関数の Taylor 展開を x の 1 次までで打ち切った場合（赤実線）, x の 3 次までで打ち切った場合（青実線）, x の 5 次までで打ち切った場合（紫実線）を示している.

$$\cos x = 1 - x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots . \tag{7.22}$$

余弦関数と余弦関数の $x = 0$ の周りの Taylor 展開を図 7.6 に示す. Taylor 展開は, 展開を x の 2 次まで, 4 次まで, 6 次までで打ち切った場合を示している. (7.20) において $x = i\theta$ とおいて, 展開を実部, 虚部に分けて整理すると Euler の公式が確かめられる.

(7.14) に戻る. (7.21) においてもし $x = 10^{-1}$ だとすると, 第 2 項の大きさは $\mathcal{O}(10^{-3})$, 第 3 項は $\mathcal{O}(10^{-5})$ となる.[*3]したがって, $x = 10^{-1}$ のときには 1% の誤差の範囲で $\sin x = x$ と近似できる.

[*3] $\mathcal{O}(a)$ とはオーダー a と読み, せいぜい大きくても a 程度の大きさという意味である.

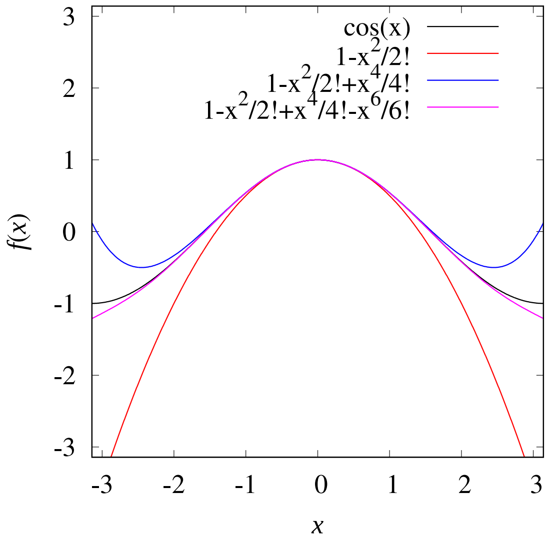

図 7.6　余弦関数 (黒実線) とその Taylor 展開の比較．余弦関数の Taylor 展開を x の 2 次までで打ち切った場合（赤実線）, x の 4 次までで打ち切った場合（青実線）, x の 6 次までで打ち切った場合（紫実線）を示している．

演習問題*4

1. 授業では 2 次元極座標系の単位ベクトルの時間微分を図を使用しながら幾何学的, 直感的に導きました．以下では計算によって導いてみましょう．

   (a) 図 7.2 を参考に, 極座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r(t)$ と $\boldsymbol{e}_\theta(t)$ をデカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ と θ を用いて書きなさい．(単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r(t)$ と $\boldsymbol{e}_\theta(t)$ をデカルト座標系において分解する.)

   解答例:　図 7.2 を参考に $\boldsymbol{e}_r$ は長さが 1 で x 軸方向と θ の角度を持っているので,

$$\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j} \tag{7.23}$$

   であることがわかる．同様に,

$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j} \tag{7.24}$$

   である．

   (b) 前節問で導いた単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ と $\boldsymbol{e}_\theta$ のデカルト座標系における分解を微分しなさい．ここで θ が時間の関数であることに注意しなさい．

*4 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください．提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので．

解答例: (7.23) を t に関して微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta\,\boldsymbol{j} \\ &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\left(-\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}\right) \qquad (7.25)\end{aligned}$$

を得る. 同様に, (7.24) を t に関して微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta\,\boldsymbol{i} - \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta\,\boldsymbol{j} \\ &= -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\left(\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j}\right) \qquad (7.26)\end{aligned}$$

である.

(c) 以上から,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta, \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r\end{aligned}$$

を導きなさい.

解答例: (7.25) に (7.24) を代入して,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta,$$

を得る. 同様に (7.26) に (7.23) を代入して,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r$$

を得る.

2. 以下の関数を $x = 0$ の周りで Taylor 展開しなさい.
   - 指数関数: e^x
   - 余弦関数: $\cos x$

第 8 章

ベクトルの掛け算, ベクトルの積分, 偏微分

これまでのいくつかの章で, 力 $\boldsymbol{F}$ が具体的に与えられたとき, 運動方程式を座標系の各成分に分解して積分を実行し, 質点の時々刻々の位置や速度を求めてきた. 引き続く章では力 $\boldsymbol{F}$ が具体的に与えられていない一般的な状況で, 運動方程式をベクトル形式のまま積分するという一般論を展開していく予定である. そのために必要な数学的知識をこの章で解説する.

8.1　ベクトルの掛け算：内積

ベクトルの足し算, 引き算は 2 章で既に導入した. ここではさらにベクトルの掛け算を導入する. ベクトルの掛け算には 2 種類ある. ベクトルどうしを掛けたときスカラー量になる掛け算（**内積**, もしくは**スカラー積**と呼ばれる）とベクトルどうしを掛けたときベクトル量になる掛け算（**外積**, もしくは**ベクトル積**と呼ばれる）の 2 種類である. ここでは前者の内積について解説する. 外積は後期に開講される力学 II で扱う.

8.1.1　内積の定義

二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ があったとき, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積を

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \tag{8.1}$$

と書く.

■**注意**：　$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の中黒「・」を忘れないで付けることが重要である. 例えば掛け算なので「・」の代わりに「×」と書く, 即ち $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ と書くと, これは $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積を

表すことになる．また何も記号を付けない場合には, どのような掛け算, 内積なのか外積なのか, が判別できない．記号は省略せず正しいモノを付けなければならない．

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ は次のように定義される:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \equiv |A||B|\cos\theta. \tag{8.2}$$

ここで, θ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角度である．

8.1.2　内積の性質

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ がベクトル, p がスカラーのとき, 内積の定義 (8.2) から, 内積は次の性質を持つことがわかる:

1. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$. 可換則
2. $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$. 分配則
3. $p(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (p\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\cdot(p\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})p$. 分配則
4. $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が互いに直角ならば, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$.
   - デカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は互いに直交するので, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0$ である．
5. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = |A|^2$. したがって, $|A| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$.
   - デカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ大きさが 1 なので, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1$ である．
6. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ がデカルト座標系で次のように分解できるとき,

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k},$$

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積を成分を使って書き下すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \quad &= (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k})\cdot(B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}),\\ &= A_xB_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + A_xB_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} + A_xB_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\ &\quad + A_yB_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} + A_yB_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} + A_yB_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\ &\quad + A_zB_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} + A_zB_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} + A_zB_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\end{aligned} \tag{8.3}$$

となる．つまり $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ のおなじ成分どうしを掛けて和を取ればよい．この性質は座標系がデカルト座標系以外の直交座標系でも成り立つ性質である．例えば, 2 次元極座標系で $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がそれぞれ

$$\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{e}_r + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta$$
$$\boldsymbol{B} = B_r\boldsymbol{e}_r + B_\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

と分解できるとする．ここで $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ はそれぞれ 2 次元極座標系の動径方向, 方位角方向の単位ベクトルである．このとき

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_rB_r + A_\theta B_\theta$$

である．

7. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ で $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, $|\boldsymbol{B}| \neq 0$ なら $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ は直交する．

8.2　線積分

8.2.1　定義

あるベクトル $\boldsymbol{A}$ を経路 C に沿って積分する

$$\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{8.4}$$

を $\boldsymbol{A}$ の C に沿っての**線積分**という．被積分関数はベクトル量であるが, 線積分の結果はスカラー量であることに注意しなさい．内積の定義および, ベクトルをデカルト座標系で分解すると, $\boldsymbol{A}$ の C に沿っての線積分は

$$\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{C}} A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z \tag{8.5}$$

である．積分の始点と終点が同じであっても, その途中にどのような経路を取るかによって積分の値が異なる．しかしながら, $\boldsymbol{A}$ がある性質を満足するならば, $\boldsymbol{A}$ の線積分は経路に依存せず, 積分の始点と終点だけに依存するようになる．

8.2.2　線積分の具体例

1. $\boldsymbol{A} = (3x^2 - 6y)\boldsymbol{i} + (3x + 2y)\boldsymbol{j}$ を $(x, y) = (0, 0)$ から $(x, y) = (1, 1)$ まで次の経路 C_1, C_2, C_3 に沿って線積分しなさい．
   (a) C_1: 放物線 $y = x^2$.
   (b) C_2: 直線 $y = x$.
   (c) C_3: 次の経路に沿う直線: $(0, 0) \to (1, 0) \to (1, 1)$.
   模範解答:（a）　被積分関数における y は x^2 に置き換えられ, また $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$ と

変数変換することにより

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}_1} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}_1} (3x^2-6y)\,\mathrm{d}x + (3x+2y)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 (3x^2-6x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 2x(3x+2x^2)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(4x^3+3x^2\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[x^4+x^3\right]_0^1 = 2.\end{aligned}$$

（b） 被積分関数における y は x に置き換えられ, また $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$ と変数変換することにより

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}_2} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}_2} (3x^2-6y)\,\mathrm{d}x + (3x+2y)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 (3x^2-6x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (3x+2x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(3x^2-x\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

（c） $(0,0)\to(1,0)$ を経路 $\hat{\mathrm{C}}_3$, $(1,0)\to(1,1)$ を経路 $\tilde{\mathrm{C}}_3$ とする. 経路 $\hat{\mathrm{C}}_3$ では被積分関数における y は 0 に置き換えられ, また $\mathrm{d}y=0$, 経路 $\tilde{\mathrm{C}}_3$ では被積分関数における x は 1 に置き換えられ, また $\mathrm{d}x=0$ であることから

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}_3} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}_3} (3x^2-6y)\,\mathrm{d}x + (3x+2y)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (3+2y)\mathrm{d}y\\ &= \left[x^3\right]_0^1 + \left[3y+y^2\right]_0^1 = 5.\end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{A}=(2xy+1)\boldsymbol{i}+(x^2+2y)\boldsymbol{j}$ を $(x,y)=(0,0)$ から $(x,y)=(1,1)$ まで, 前節問と同じ経路 C_1, C_2, C_3 にそれぞれに沿って線積分しなさい.[*1]

8.3 偏微分

8.2.2 節の線積分の例で, 関数によってはその線積分は経路の始点と終点にのみ依存して経路の詳細に依存しないことを見た. どのような関数の線積分が経路によらない値をと

[*1] どの経路でも答えは 3 になる.

るのか, を議論するために, さらに以下の数節でいくつかの数学的な概念を導入する.

前章までで扱ってきた微分は, 1 変数関数の微分であった．空間 x, y, z やさらに時間 t にも依存する多変数関数の微分, **偏微分**, をここで導入する.

いま簡単化のため, x, y を独立変数とする 2 変数のスカラー関数 $f(x, y)$ を考える．この関数はさらに z にも依存する 3 変数関数でもよいし, 時間 t にも依存する 4 変数関数でもよい．また多変数に依存するベクトル関数であっても以下の話は成り立つ．とりあえず, 2 変数のスカラー関数で説明しておく．f の x に関する偏微分 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ とは以下の様に定義される:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}. \tag{8.6}$$

つまり, y はあたかも定数と考えて f を x に関して微分をするのである．左辺で添え字の y は一定とおく変数を表している．一定とおく変数が自明な場合には, 添え字は省略される場合がある．$\frac{\partial f}{\partial x}$ はデル エフ デル エックスと読む．全く同様にして, f の y に関する偏微分は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \equiv \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \tag{8.7}$$

である．2 変数以上の多変数関数や関数がベクトルであるときも同様に偏微分が定義できる.[*2]

1 変数関数 $g(x)$ の微分 $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ は, その関数のグラフの傾きであった．$\frac{\partial f}{\partial x}$ は y のある値に沿って, f の断面を取った時にできるグラフの (x 軸方向の）傾きである．$\frac{\partial f}{\partial y}$ は x のある値に沿って, f の断面を取った時にできるグラフの（y 軸方向の）傾きである.

8.4　全微分

ある点 (x, y) における 2 変数関数 $f(x, y)$ の値と, その近傍の点 $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$ における f の値との差 $\mathrm{d}f$

$$\mathrm{d}f \equiv f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y) \tag{8.10}$$

[*2] 3 変数関数 $f(x, y, z)$ の z に関する偏微分 $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}$ の定義は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \equiv \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z} \tag{8.8}$$

である．さらに, ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の x に関する偏微分 $\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\right)_{y,z}$ は

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\right)_{y,z} \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta x} \tag{8.9}$$

と定義される.

は f の全微分といい, 偏微分を用いて

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{8.11}$$

と書かれる．これは 1 変数関数 $g(x)$ における $\mathrm{d}g = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ に対応するものである．全く同様に 3 変数以上の関数にも全微分を導入できる.[*3]

8.5　勾配演算子

多変数のスカラー関数から多変数のベクトル関数を生成する演算子として勾配演算子もしくはナブラ, 記号で $\boldsymbol{\nabla}$ と書かれる, と呼ばれるものがある．ナブラの定義は 2 次元のデカルト座標系のときには

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} \tag{8.13}$$

である．3 次元への拡張は容易であろう.[*4] $f(x, y)$ に $\boldsymbol{\nabla}$ を作用させたもの

$$\boldsymbol{\nabla} f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} \tag{8.15}$$

は $\mathrm{grad} f$ とも書かれ, f **の勾配**と呼ばれ, それは (8.15) からわかるように $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ x, y 成分とするベクトルである．

■注意　$\boldsymbol{\nabla}$ はあたかもベクトルのように扱われる．そこで ∇ ではなく, $\boldsymbol{\nabla}$ とかかれる．またベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$ などという演算も定義できる．しかしながら, $\boldsymbol{\nabla}$ が作用する関数と $\boldsymbol{\nabla}$ の順番には注意が必要で $\boldsymbol{\nabla} f \neq f\boldsymbol{\nabla}$ であるし, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ である．f の勾配を表すのは $\boldsymbol{\nabla} f$ であり $f\boldsymbol{\nabla}$ ではない．$\boldsymbol{\nabla}$ を含む演算は掛け算に関しては可換ではないのである．

$\boldsymbol{\nabla} f$ はベクトルなので, その方向や大きさはどのようなものであろうか．先ず方向について考える．f を地図上の (x, y) における標高と考えるとイメージがしやすいであろう．等高線は f の値が等しいところを連ねた線である．ある等高線上のある点 P と同じ等高

[*3] $f(x, y, z)$ の全微分は

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{8.12}$$

である．

[*4] 3 次元のデカルト座標系の勾配演算子は

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{8.14}$$

である．

線上の点 P の近傍の点 Q を考える．P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ とすると, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は点 P における等高線の接線方向を向くベクトルである．点 P における $\boldsymbol{\nabla} f$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ の内積を計算すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{j}\right)\cdot(\mathrm{d}x\,\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\,\boldsymbol{j}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}f. \end{aligned} \tag{8.16}$$

つまり, P と Q との間の f の全微分になる．しかしながら, P と Q は同じ等高線上の点であるので $\mathrm{d}f=0$ となる．したがって, $\boldsymbol{\nabla} f$ は $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ と垂直, 即ち等高線の接線と垂直な方向を向く．$\boldsymbol{\nabla} f$ の正の方向は f が大きくなる方向である．さらに, 等高線の間隔が狭いところほど大きくなる．

具体例:　$\phi=x^2y+x+y^2$ の勾配は, $\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xy+1$, $\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2+2y$ なので, $\boldsymbol{\nabla} f=(2xy+1)\boldsymbol{i}+(x^2+2y)\boldsymbol{j}$ となる．これは 8.2.2 節の例 2 の場合の被積分関数に等しい．即ち, 8.2.2 節の例 2 の場合の被積分関数は, $\phi=x^2y+x+y^2$ の勾配によって導かれる．

8.6　線積分再訪

以上の知識を使って, 再び線積分を考えよう．位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$（デカルト座標系の成分で (x_1,y_1,z_1)）で表される点 P からある経路 C に沿って位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$（デカルト座標系の成分で (x_2,y_2,z_2)）で表される点 Q まで, あるベクトル $\boldsymbol{A}$ を線積分する．このとき, $\boldsymbol{A}$ があるスカラー関数 ϕ の勾配から導かれる, 即ち, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}\phi$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_{\mathrm{C}} \mathrm{d}\phi=\phi(x_2,y_2,z_2)-\phi(x_1,y_1,z_1) \end{aligned} \tag{8.17}$$

となり, 線積分の結果は経路の始点 $\boldsymbol{r}_1$ と終点 $\boldsymbol{r}_2$ のみに依存することになる．実際に, 8.2.2 節の例 2 の場合を再度扱ってみる．被積分関数 $\boldsymbol{A}=(2xy+1)\boldsymbol{i}+(x^2+2y)\boldsymbol{j}$ はスカラー関数 $\phi=x^2y+x+y^2$ の勾配で与えられることは前節の例で見た．そこで, このベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ を $(x,y)=(0,0)$ から $(x,y)=(1,1)$ まで, ある経路 C に沿って線積分し

てみると,

$$\begin{aligned}\int_C (2xy+1)\mathrm{d}x + (x^2+2y)\mathrm{d}y &= \int_C \boldsymbol{\nabla}(x^2y+x+y^2)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_C \mathrm{d}(x^2y+x+y^2) \\ &= \left[x^2y+x+y^2\right]_{(0,0)}^{(1,1)} = 3. \end{aligned} \tag{8.18}$$

つまり, 経路に依存せず線積分は始点と終点における ϕ の値で決まり, 3 となる. これは以前の計算と無矛盾である.

演習問題[*5]

1. $\boldsymbol{A} = (2xy+1)\boldsymbol{i} + (x^2+2y)\boldsymbol{j}$ を $(x,y)=(0,0)$ から $(x,y)=(1,1)$ まで, 以下の経路 C_1, C_2, C_3 にそれぞれに沿って線積分しなさい.[*6]
   (a) C_1: 放物線 $y = x^2$.
   (b) C_2: 直線 $y = x$.
   (c) C_3: 次の経路に沿う直線: $(0,0) \to (1,0) \to (1,1)$.
2. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ のとき, 次の偏微分 (a)〜(c) と勾配 (d) を計算しなさい.
   (a) $\frac{\partial r}{\partial x}$
   (b) $\frac{\partial r}{\partial y}$
   (c) $\frac{\partial r}{\partial z}$
   (d) $\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}$

[*5] 提出する際には A4 のレポート用紙で提出してください. 提出されたレポートの大きさが不揃いだと紛失してしまう恐れがあるので.

[*6] どの経路でも答えは 3 になる.

第 9 章

エネルギー保存則

物理学には**保存則**と呼ばれる重要な法則がある．**保存**とは時間とともに変化せず一定の値を保ち続ける性質を指し, 保存される量は**保存量**と呼ばれる．力学における保存則は,（力学的）エネルギー保存則, 運動量保存則, 角運動量保存則がある．これらの保存則は運動方程式から導くことができる．そこで, これらの保存則は運動方程式が持つ情報を超えるものではない．しかしながら, これらの保存則を用いれば, 具体的に運動方程式を立ててそれを解くことなく, どのような運動が可能か, 不可能か, を判断したり, 証明したりすることができる, という点で有用である．

以下では, 前章で導入した線積分の知識を, 力学の問題に適用することで仕事の概念を導入し, エネルギー保存則を導く．

9.1 仕事

物理学では, 物体が力を受けて移動するとき,「力は物体に**仕事** (work) をした」, という．

9.1.1 定義

時間空間に依存しない力 $\boldsymbol{F}$[*1]が作用している物体が, 距離 $\boldsymbol{r}$ だけ動いたとき,

$$W \equiv \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} \tag{9.1}$$

を力が物体にした仕事と定義する．

内積の定義から, 力の働く方向と移動距離が垂直のときには力による仕事はゼロである．また移動距離がゼロ ($|\boldsymbol{r}| = 0$) であれば, この場合も力による仕事はゼロである．

[*1] 即ち, $\boldsymbol{F}$ は向きも大きさも変わらない一定のベクトル．

(9.1) をより一般の場合に拡張しよう．もし，力 $\boldsymbol{F}$ が場所の関数である場合，即ち，$\boldsymbol{F}(x,y,z)$ である場合に，物体が位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ で表される点 P から，位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$ で表される点 Q まである経路 C に沿って移動したときに，力 $\boldsymbol{F}$ がした仕事は，

$$W \equiv \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{9.2}$$

となる．これは，経路を無限小の長さの区間に分割すると，各区間では $\boldsymbol{F}$ は一定とみなすことができるので，各区間に (9.1) を適用し，その和を計算することにより導かれる．(9.2) は力 $\boldsymbol{F}$ がした仕事は力 $\boldsymbol{F}$ の線積分で与えられることを示している．

9.1.2　次元

仕事はどのような次元を持つのかを調べておく．定義 (9.1) もしくは (9.2) より仕事 W の次元は力の次元と長さの次元との積である．力の次元を長さの次元 L，質量の次元 M，時間の次元 T で表すと，

$$\begin{aligned}[W] &= [\text{力}] \times [\text{長さ}] \\ &= \mathrm{MLT}^{-2} \times \mathrm{L} \\ &= \mathrm{M}(\mathrm{L}/\mathrm{T})^2 \end{aligned} \tag{9.3}$$

となり，質量と速度の 2 乗で表せる．これはあとで導入されるエネルギーと同じ次元である．SI 単位では，仕事，エネルギーの単位は J (ジュール) と表され，

$$\begin{aligned}\mathrm{J} &= \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \\ &= \mathrm{kg}\,(\mathrm{m/s})^2 \end{aligned} \tag{9.4}$$

である．

9.2　運動方程式の積分

力 $\boldsymbol{F}$ の具体的な形は指定せずに，運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \tag{9.5}$$

の積分を行ってみる．(9.5) を位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ によって指定される点 P から位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$ によって指定される点 Q まである経路 C に沿って線積分する:

$$\int_{\mathrm{C}} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{9.6}$$

前節で述べたように, 右辺は力 $\boldsymbol{F}$ が行う仕事である. 左辺は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が時間の関数であること, 即ち, $\boldsymbol{r}(t)$ であること, を考えると, 積分を位置に関する積分から時間に関する積分に変数変換することができる:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t. \tag{9.7}$$

質点が $\boldsymbol{r}_1$ にいる時刻を t_1, $\boldsymbol{r}_2$ にいる時刻を t_2 と表すことにする. このとき (9.6) の左辺は (9.7) を用いて,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{t_1}^{t_2} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\boldsymbol{v}^2\right\}\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\mathrm{d}\left\{\boldsymbol{v}^2\right\} \\ &= \left[\frac{1}{2}m\left\{\boldsymbol{v}(t)\right\}^2\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_2) - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_1)\end{aligned} \tag{9.8}$$

と変形できる. ここで速度を $\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}$ で表し,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}, \tag{9.9}$$

を用いた. $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$ は運動している物体が持っているエネルギーで**運動エネルギー**と呼ばれる. これは運動の激しさを表す指標の一つである.

以上をまとめると, 運動方程式を積分することにより

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_2) - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_1) = \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{9.10}$$

が得られた. 上式は, 力 $\boldsymbol{F}$ が質点に仕事をすると, その分だけ質点の運動エネルギーが変化することを意味している.

9.3　エネルギー保存則

前節の議論をさらに進める. 力 $\boldsymbol{F}$ があるスカラー関数 $U(x, y, z)$ の勾配を用いて,

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U \tag{9.11}$$

と表されるとき, $\boldsymbol{F}$ を**保存力**と呼び, U を**ポテンシャル**と呼ぶ.[*2] 被積分関数のベクトルがあるスカラー関数の勾配で書けるとき, ベクトルの線積分は経路の詳細によらず, 始点と終点の値だけで線積分の値が決まることを前章で見た. そこで, 今のような状況で, (9.10) は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_2)-\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_1)&=\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=-\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{\nabla}U\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=-\int_{\mathrm{C}}\mathrm{d}U=U(\boldsymbol{r}_1)-U(\boldsymbol{r}_2)\end{aligned}\tag{9.12}$$

となる. (9.12) における $U(\boldsymbol{r}_1)$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ で与えられる点 P におけるポテンシャルの値を表す. 同様に $U(\boldsymbol{r}_2)$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$ で与えられる点 Q におけるポテンシャルの値を表す. (9.12) は移項することにより

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_2)+U(\boldsymbol{r}_2)=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(t_1)+U(\boldsymbol{r}_1)\tag{9.13}$$

と書き直すことができる. この式の左辺は, 質点が時刻 t_2 において位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}(t_2)$ に存在する場合に, 質点が持つ運動エネルギーとポテンシャルの和であり, 右辺は質点が時刻 t_1 において位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}(t_1)$ に存在する場合に, 質点が持つ運動エネルギーとポテンシャルの和であり, 両者が等しいことを述べている. t_1 と t_2 のとりかたは任意であるので, もし t_1 が運動が開始された時刻, t_2 が運動の途中の任意の時刻と考えると, 運動エネルギーとポテンシャルの和は, 運動の間つねに一定の値になっていることを意味している. 運動エネルギーとポテンシャルの和は**力学的エネルギー**と呼ばれ, したがって, (9.13) は**力学的エネルギー保存則**を表している.

■ポテンシャルに関する注意事項 1 ： 一般に運動方程式における力 $\boldsymbol{F}$ は時間の関数であってもよいが, (9.12) で定義されるポンテンシャル U は位置のみの関数である. つまり場所を指定すればポテンシャルは時間を指定せずに値が決まる関数である. 但し, 質点が運動する場合には質点の位置が時間により変わるので, 質点のポテンシャルは質点の位置を通じて時間に依存する. 即ち, $U(x,y,z)=U(x(t),y(t),z(t))$ である. もしくは

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial t}=0\tag{9.14}$$

[*2] ポテンシャルはエネルギーの次元を持っているのでポテンシャルエネルギーとも呼ばれる. ポテンシャルは高校の物理では位置のエネルギーと呼ばれていたものである.

であるが,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U(x,y,z)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\
&= \boldsymbol{\nabla} U \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \boldsymbol{\nabla} U \cdot \boldsymbol{v} \neq 0
\end{aligned}
\tag{9.15}
$$

である．このような U の t に対する依存性を, U は t に陽に依存しない, もしくは U は t に陰的に依存する, と呼ぶ.

■ポテンシャルに関する注意事項 2　:ポテンシャルには定数分の不定性がある．つまり, (9.12) を満たすポテンシャル U にある定数 U_0 を足したものを, U' とする: $U'(x,y,z) \equiv U(x,y,z) + U_0$. しかし, $\nabla U' = \nabla U$ なので, U' からも U からも同じ保存力 $\boldsymbol{F}$ が導かれる．そこで, ポテンシャルを論じるときにはどこを基準にしたポテンシャルなのかを明示する場合がある.

9.4　具体例

6 章で考察したバネに繋がれたおもりの振動の運動方程式から, この系の力学的エネルギーと力学的エネルギー保存則を導いてみよう．運動方程式 (6.3) を点 P から点 Q まで線積分する．ただしこの問題は空間は 1 次元 ($\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i}$) であったので, 点 P の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i}$, 点 Q の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i}$ である．また質点が P, Q にいる時刻をそれぞれ t_1, t_2 とすると $\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}_1$ $\boldsymbol{r}(t_2) = \boldsymbol{r}_2$, $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ である.

前節の一般論のやり方に従って運動方程式を線積分する．計算の途中経過を詳細に書い

ておくと,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} m\frac{\mathrm{d}^2(x\,\boldsymbol{i})}{\mathrm{d}t^2}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} kx\,\boldsymbol{i}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
&\Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\mathrm{d}t = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\,\mathrm{d}\left\{v_x^2\right\} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow \quad \left[\frac{1}{2}mv_x(t)^2\right]_{t_1}^{t_2} = -\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2}\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_x(t_2)^2 - \frac{1}{2}mv_x(t_1)^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_x(t_2)^2 + \frac{1}{2}kx(t_2)^2 = \frac{1}{2}mv_x(t_1)^2 + \frac{1}{2}kx(t_1)^2.
\end{aligned}
\tag{9.16}
$$

ここで, 5 番目の式以降 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x$ とした. 以上から, この系の力学的エネルギー E は

$$
E \equiv \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{9.17}
$$

であり, (9.16) が力学的エネルギー保存則を表している. (9.17) の第 1 項が運動エネルギーで第 2 項がポテンシャルである. なお, ポテンシャルはバネの自然長を基準 ($x = 0$ のとき, $U = 0$) としている.

9.5　エネルギー保存則の別の導出方法

9.3 節では運動方程式を線積分することによって, エネルギー保存則を導いた. 本節では別の方法で議論してみる. ここで紹介する方法が, エネルギー保存則やエネルギーの時間発展方程式を導出する際の標準的な方法である.

9.5.1　一般論

9.3 節と同様に, 力がポテンシャル U から導かれる場合の運動方程式

$$
m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\boldsymbol{\nabla}U \tag{9.18}
$$

を議論の出発点とする．(9.18) の両辺と速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ との内積を計算する:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\nabla}U\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{9.19}$$

(9.19) の左辺は (9.9) より，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}$ に等しい．一方, (9.19) の右辺は, (9.15) より, $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ に等しい．以上より, (9.19) は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}. \tag{9.20}$$

もしくは,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U\right) = 0. \tag{9.21}$$

と書き直せる．つまり, 運動エネルギー $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$ とポテンシャル U の和である全エネルギー $E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U$ は時間に依存しない: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$. ここで, ポテンシャルは $y = 0$ を基準とした.

9.5.2　具体例 1

5.3 節で扱った自由落下問題のエネルギーおよびエネルギー保存則を議論してみる．一様な重力場中を運動する質点が従う運動を方程式を考える:

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} = -mg\boldsymbol{j}. \tag{9.22}$$

ここで, 鉛直方向をデカルト座標系の y 軸, 重力の向きと逆向きを y 軸の正の方向とした. $\boldsymbol{j}$ はデカルト座標系の y 方向の単位ベクトルである．運動は鉛直方向のみとする．このとき (9.22) の両辺と速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ との内積を計算する:

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -mg\boldsymbol{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{9.23}$$

(9.23) の左辺は,

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_y^2\right) \end{aligned}$$

となる．ここで速度の鉛直方向成分を v_y とした．一方, (9.23) の右辺は,

$$\begin{aligned} -mg\boldsymbol{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= -mg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-mgy) \end{aligned}$$

に等しい．以上より, (9.23) は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}mv_y^2 + mgy\right\} = 0 \tag{9.24}$$

と変形できる．つまり, 一様な重力場中の鉛直 1 次元運動では, 運動エネルギー $\frac{1}{2}mv_y^2$ とポテンシャル mgy の和である全エネルギー $E = \frac{1}{2}mv_y^2 + mgy$ は時間に依存しない: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$.

9.5.3　具体例 2

9.4 節で考察したバネに繋がれたおもりの振動を再び考える．運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} = -kx\boldsymbol{i} \tag{9.25}$$

の両辺と速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ との内積を計算する:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -kx\boldsymbol{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{9.26}$$

(9.26) の左辺は,

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right) \end{aligned}$$

となる．ここで速度の x 方向成分を v_x とした．一方, (9.26) の右辺は,

$$\begin{aligned} -kx\boldsymbol{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= -kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \end{aligned}$$

に等しい．以上より, (9.23) は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2\right\} = 0 \tag{9.27}$$

と変形できる．こうして再び力学的エネルギー (9.17) の保存則が得られる．