第5章　Laplace変換

5.1　定義

ある関数 $F(t)$ の Laplace 変換 (Laplace transform) は以下のように定義される:

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.1}$$

ここで, s は複素数である.

5.2　幾つかの注意

1. Fourier 変換との類似性　：ある関数 $F(t)$ の Fourier 変換は

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} F(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.2}$$

と書かれる.[1] 積分範囲の下限の違いをとりあえず無視すれば, Fourier 変換と Laplace 変換との違いは, 被積分関数に含まれる指数関数の指数部分の違いだけである. この指数が純虚数の場合が Fourier 変換で, それが複素数の場合が Laplace 変換になっているのがわかるであろう. Fourier 変換が Fourier 級数のナイーブな拡張であったが, Laplace 変換は Fourier 変換の拡張と考えることができる.

2. 積分の下限, 及び応用　：Laplace 変換を, Fourier 変換と同様に,

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_{-\infty}^\infty e^{-st} F(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.3}$$

のように, 独立変数に関して $-\infty$ から ∞ の積分で定義している本もある. もし変換される関数 $F(t)$ が

$$F(t) = 0,\ (t < 0) \tag{5.4}$$

[1] 先に導入した Fourier 変換の公式 (2.10) は, 正変換, 逆変換が対称的な形になるように書いた. ここでは Laplace 変換と Fourier 変換の類似性を強調するために, あえて $1/\sqrt{2\pi}$ が現れない形に書いた.

を満足する時には, 両者の定義は一致することがわかる．このとき, (5.1) のことを片側 Laplace 変換と呼ぶ.

Laplace 変換の定義を t の関数を用いて書いたのは, Laplace 変換が特に時間発展問題の微分方程式の解法に強力な武器となることを意識しているためである．時間発展の微分方程式では, 一般解に含まれている任意定数は, 初期条件によってその値を決定することができた．Laplace 変換を用いて微分方程式を解く場合には, Laplace 変換する際の積分の下限 $t = 0$ に初期条件の情報が含まれるようになっており, それによって任意定数の値が決定されるようになっている.[2]

3．s に関する制限：Laplace 変換の積分が存在するためには, s は任意の複素数ではなく, ある制限が設けられる．片側 Laplace 変換の場合には $t \to \infty$ で被積分関数が 0 に収束するように選ばれる.

4．逆 Laplace 変換：Laplace 変換の定義式 (5.3) で, $s = \sigma + i\omega$ (ここで, σ, ω は実数) とおくと, (5.3) は

$$\begin{aligned} f(\sigma + i\omega) &= \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t} F(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(t) e^{-\sigma t}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.5}$$

である．したがって, $f(\sigma + i\omega)$ は $F(t)e^{-\sigma t}$ の Fourier 変換とみなすことができる．逆 Fourier 変換により, $F(t)e^{-\sigma t}$ は

$$F(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(\sigma + i\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

と表現できる．すなわち,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+i\omega)t} f(\sigma + i\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{5.6}$$

となる．もしくは,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} f(s)\,\mathrm{d}s \tag{5.7}$$

[2] Fourier 変換の公式では変換される関数の独立変数を x と書いた．これは空間変数の x を意識して, もしくは変換される関数が場の量であることを意識して, そのように書いた．変換される関数が空間変数を独立変数にもつ場合には Foureir 変換後の関数は波数の関数となる．時系列データ, 従って時刻 t の関数, を変換することも可能であり, その場合には変換される関数は t の関数として書かれる事が慣例である．この場合は Foureir 変換後の関数は周波数の関数となる.(5.2) 参照.

表 5.1: Laplace 変換の代表例

$F(t)$	$\mathcal{L}\{F(t)\}$
$\delta(t)$	1
a	$a/s, \qquad \mathrm{Re}[s] > 0$
e^{at}	$1/(s-a), \qquad \mathrm{Re}[s] > a$
$\sin at$	$a/(s^2+a^2), \qquad \mathrm{Re}[s] > 0$
$\cos at$	$s/(s^2+a^2), \qquad \mathrm{Re}[s] > 0$
$t^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$n!/(s^{n+1}), \qquad \mathrm{Re}[s] > 0$
$f'(t)$	$s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$
$f''(t)$	$s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$

となる. (5.7) は逆 Laplace 変換の公式である.

逆 Laplace 変換の計算には複素積分の知識が必要で, かなり面倒である. 代表的な関数の Laplace 変換, 逆 Laplace 変換の例が数学公式集に載っているので, 実際にはそれを利用する場合が多い.

5.3 Laplace 変換の幾つかの例

Laplace 変換の代表例を Table5.1 にあげておく.
その他の Laplace 変換, Laplace 逆変換は数学公式集を参照するとよい.

5.4 Laplace 変換を用いた微分方程式の解法 〜例題〜

Laplace 変換を用いて微分方程式 $f''(t) + f(t) = t$ を初期条件 $f(0) = 0, f'(0) = 2$ のもとに解く.[3]

与えられた微分方程式の両辺を Laplace 変換する:

$$\mathcal{L}\{f''(t) + f(t)\} = \mathcal{L}\{t\}. \tag{5.8}$$

前節で与えた公式を参考にすると,

$$s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) + \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}. \tag{5.9}$$

[3] この問題は振動数 $\omega = 1$ の単振動の微分方程式に, 時間に比例する外力項が加わった, 強制振動問題の微分方程式である. 通常の方法で解いて見て, Laplace 変換による解法と答えが一致することを確かめておくことを勧める.

従って,

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{2s^2+1}{s^2\left(s^2+1\right)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}. \tag{5.10}$$

上式を逆 Laplace 変換する:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}\right\} \qquad (5.11) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}. \end{aligned}$$

やはり前節で与えた公式より逆変換は,

$$f(t) = t + \sin t, \tag{5.12}$$

となる.

Laplace 変換を用いて微分方程式を解く場合には, ここで述べた例のように公式集を参照して解くことが多い. また, 正変換に比べて逆変換は計算が複雑なので, 公式集を参照しない場合には, Laplace 変換された形の解（上の例では (5.10)）で, 方程式がとけて解が与えられたと満足する場合が多い.