第4章　Fourier級数展開（Fourier変換）の幾何学的意味〜直交関数展開〜

ここでは, Fourier 級数展開, Fourier 変換について, ベクトルという立場から, その意味 (ココロ) を説明する．ここに登場する考え方や概念は, ベクトルと三角関数と三角関数の積分だけ, 即ち高校の数学で習ったものだけである．

4.1　ベクトル

まず, 高校生のときに習ったベクトルの復習をしておく．3 次元空間内の任意のベクトルを $\boldsymbol{u}$ とする．デカルト座標系では $\boldsymbol{u}$ は次のように表現される：

$$\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}. \tag{4.1}$$

ここで, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルであり u_x, u_y, u_z はそれぞれ x, y, z 方向の $\boldsymbol{u}$ の成分である．ベクトルでは「内積」という演算が定義でき，単位ベクトルは内積に対して次のような性質を持つベクトルである：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0, \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = |\boldsymbol{i}|^2 = 1, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = |\boldsymbol{j}|^2 = 1, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = |\boldsymbol{k}|^2 = 1. \tag{4.3}$$

(4.2) 式の性質は，

- 異なる単位ベクトルは互いに直交する

という性質を表しており, (4.3) 式の性質は,

- 単位ベクトルの大きさは 1 である

ことを表している．成分 u_x, u_y, u_z は単位ベクトルのこのような性質を用いて，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ との内積をそれぞれ計算することにより求められる．例えば $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{i}$ の内

積は,

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i} = u_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} + u_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = u_x|\boldsymbol{i}|^2.$$

従って,

$$u_x = \frac{1}{|\boldsymbol{i}|^2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}. \tag{4.4}$$

同様にして u_y, u_z は,

$$u_y = \frac{1}{|\boldsymbol{j}|^2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{j}, \quad u_z = \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k}. \tag{4.5}$$

と求められる．ここでは, あるデカルト座標系でベクトル $\boldsymbol{u}$ を表現したが, いま考えた座標系を例えば z 軸を回転軸にして任意の角度回転させたような座標系 (単位ベクトルが $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}$, これも直交座標系である) を考えることができる．つまり空間の中にはいろいろな直交座標系を張ることができる．そして各座標系で全く同じようにベクトル $\boldsymbol{u}$ を表現できる (展開できる)．このとき, 各座標系における $\boldsymbol{u}$ の成分の値は異なる (表現は異なる) が, $\boldsymbol{u}$ はあくまでも $\boldsymbol{u}$ である．どういう座標系を用いて $\boldsymbol{u}$ を表現するればよいか? それは問題が最も簡単に取り扱えるような座標系を選べばよい.

4.2　Fourier 級数展開のココロ

ここでは Fourier 級数展開 (2.1) 式とは関数 $f(x)$ を (4.1) 式の様な形に展開したものであることを説明する．即ち，関数 $f(x)$ がベクトル $\boldsymbol{u}$ に，可算無限個[1]の三角関数 $\cos(k_n x)$, $\sin(k_n x)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ が単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, に，可算無限個の Fourier 係数 a_n, b_n が成分 u_x, u_y, u_z に対応する．関数を可算無限次元のベクトルと見做すことがミソである.

ベクトル - 関数 対応表		
$\boldsymbol{u}$	$\Longleftrightarrow$	$f(x)$
$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$	$\Longleftrightarrow$	$\cos(k_n x)$, $\sin(k_n x)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$
u_x, u_y, u_z	$\Longleftrightarrow$	a_n, b_n, $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$

[1] 1, 2, 3, . . . と勘定できる無限大のこと．例えば自然数全体の集合の要素の個数がこれに相当する．これに対し, 数えられない無限大（非可算無限）とは実数全体の集合の要素の個数のようなもの.

関数 $f(t)$ が (4.1) 式の様な形に展開できるということは, 単位ベクトルに相当する三角関数が, (4.2) 式に相当する性質を持っていなければならない. そこで, まず「関数の内積」を定義する. 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との内積を (f,g) で表し,

$$(g,f) \equiv \int_{-L}^{L} g^*(x) f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{4.6}$$

と定義する. ここで, $*$ は複素共役を表す. 即ち, $f(x)$ の複素共役と $g(x)$ の積を関数の定義域で積分する. 今の場合は実関数を考えているので, ”複素共役”を定義に持ち込まなくてもよいが, Fourier 変換のように複素関数を取り扱うときに必要となる. (4.6) 式の定義のもと, 三角関数の内積を計算する.

$$\Big(\sin(k_m x), \cos(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \sin(k_m x)\cos(k_n x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{4.7}$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots, \infty).$$

$$\Big(\sin(k_m x), \sin(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \sin(k_m x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{4.8}$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots, \infty.\ \text{但し},\ m \neq n).$$

$$\Big(\cos(k_m x), \cos(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \cos(k_m x)\cos(k_n x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{4.9}$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots, \infty.\ \text{但し},\ m \neq n).$$

$$\Big(\sin(k_n x), \sin(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \sin^2(k_n x)\,\mathrm{d}x = L, \tag{4.10}$$

$$(n = 1, 2, \dots, \infty).$$

但し, $\sin(k_0 x)$ は恒等的にゼロであるから (4.10) 式において $n=0$ は考えなくてよい.[2]

$$\Big(\cos(k_n x), \cos(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \cos^2(k_n x)\,\mathrm{d}x = L, \tag{4.11}$$

[2] $k_0 = 0$ であるから, $\sin(k_0 x) = 0$, すなわち $\sin(k_0 x)$ という (単位) ベクトルは存在しない.

$$(n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

但し, $\cos(k_0 x)$ は恒等的に 1 であるから (4.11) 式において $n = 0$ は別に考える必要がある.

$$\Big(\cos(k_0 x), \cos(k_0 x)\Big) = (1, 1) = \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x = 2L. \tag{4.12}$$

三角関数の内積で考えられるものは, 上にすべて列挙した．(4.7) 式〜 (4.9) 式は三角関数は互いに直交している (単位ベクトルは互いに直交することに対応：(4.2) 式参照) ことを表している．一方 (4.10) 式〜 (4.12) 式は三角関数の大きさの二乗を表している．上で見たように三角関数は内積の大きさが 1 になっていない．即ち単位 (ベクトル) ではないことが特徴である.

三角関数の上に挙げた性質を利用して，関数 $f(x)$ の (2.1) 式の表現と三角関数との内積を計算する．これは, ベクトルを (4.1) 式のように展開したときの係数を求めるときの操作と全く同様である.

$$\begin{aligned}
\Big(\sin(k_n x), f(x)\Big) &= b_n \Big(\sin(k_n x), \sin(k_n x)\Big), \\
b_n &= \frac{\Big(\sin(k_n x), f(x)\Big)}{\Big(\sin(k_n x), \sin(k_n x)\Big)} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, \infty.)$$

$$\begin{aligned}
\Big(\cos(k_n x), f(x)\Big) &= a_n \Big(\cos(k_n x), \cos(k_n x)\Big), \\
a_n &= \frac{\Big(\cos(k_n x), f(x)\Big)}{\Big(\cos(k_n x), \cos(k_n x)\Big)} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(k_n x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, \infty.)$$

$n = 0$ の時は,

$$\begin{aligned}
\Big(\cos(k_0 x), f(x)\Big) &= (f, 1) = \frac{a_0}{2}\Big(\cos(k_0 x), \cos(k_0 x)\Big) = \frac{a_0}{2}(1, 1), \\
a_0 &= \frac{(1, f(x))}{(1, 1)/2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

である．(4.15) 式は (4.14) 式において, $n = 0$ としたものと一緒なので，(4.14) 式の定義に含めてよい．このようにして, Fourier 級数展開における Fourier 係数の公式が得られた．((2.2) 式, (2.3) 式参照.)

これら (4.13) 式〜(4.15) 式が (4.4) 式〜(4.5) 式に相当していることは一目瞭然である．従って, 3 次元空間内の任意のベクトルが, 直交する単位ベクトルで (4.1) 式のように展開されるのと同様に, 関数を可算無限次元のベクトルと見做せば, Fourier 級数展開とは三角関数という可算無限個の規格化されていない直交関数 (直交関数系と言う) で周期関数を展開したものである, といえる．

上で見たように Fourier 係数, a_n, b_n に $1/L$ という因子が現れるのは, 関数を展開する時に用いた直交関数の大きさが 1 に規格化されていないために現れたものであり, また, a_0 に 1/2 の因子が現れるのも $\Big(\cos(k_n x), \cos(k_n x)\Big), (n = 1, 2, \ldots, \infty)$ と $\Big(\cos(k_0 x), \cos(k_0 x)\Big)$ とで大きさが因子 2 だけ異なるところから来ていることが容易にわかる．

4.3 まとめ

このように Fourier 級数展開がベクトルの展開と対応していることは, 単なる偶然ではなく, 関数をベクトルと見做すことはきちんとした数学の概念である．従って, いま考えているような有限区間を定義域とする関数の展開だけでなく, 実数全体を定義域とする関数の展開も同じように考えることができる．実数全体を定義域とする関数を $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(ikx)$ という (不可算無限個の規格化された) 直交関数で展開したものが Fourier 変換である．展開に用いた直交関数の個数が可算無限個か不可算無限個か, に応じて展開したときの表現が和で表されたり, 積分で表される．

三角関数以外にも直交関数系は存在し, その直交関数系を用いて関数を展開することができる．直交関数系の代表的なものとしては, Bessel 関数, 球調和関数と呼ばれるものがある.[3] 前者は, 境界が円形をした領域内での関数の展開に最適な関数（例えば太鼓の膜の振動を表現する）で, 後者は球面上で定義された関数を展開するときに威力を発揮する．実際に, 大気大循環モデルと呼ばれる天気予報や温暖化などの気候研究に用いられている数値モデルは, 風速, 気温, 気圧等の物理量を（水平方向には）球調和関数で展開し, 展開係数の時間発展を計算し, それを再び重ね合わせて場の量に表現しなおす, という操作を行っている.[4]

先に, 空間内にはさまざまな直交座標が存在し, その直交座標でベクトルを表現することができるが, どのような座標系を用いようがベクトル $\boldsymbol{u}$ の実体は変わる

[3] より詳しく知りたい人は Strum-Liouville 型の微分方程式の解の性質（あまり数学的なものではなく, 異なる固有値に属する固有関数は直交するというような性質）を勉強して欲しい．

[4] これには, 計算の技術的な理由もあるのだが．

ことが無く, 単に表現の仕方が異なるだけである. どの座標系を用いるかは, 解く問題が一番簡単になる座標系を選べばよいことを注意した. これと全く同様に, 関数 $f(x)$ をどのような直交関数で展開しても $f(x)$ の実体は変わりなく, ただ表現が異なるだけであり, どのような直交関数で展開してもよいのであるが, 解く問題が一番簡単になる直交関数を選び展開するのが最も便利である. ではなぜ, Fourier 級数展開や Fourier 変換がよく用いられるのか? それは我々に最も馴み深い "波", $\sin kx,\ \cos kx, \exp(ikx)$ の集合体という目で問題を理解・解釈できるからである.