

第1章 Fourier級数

Fourier 級数は，有限区間で定義された関数を，その定義区間の整数分の一を周期として持つ三角関数で展開したものである．Fourier 級数は物理学（地球惑星科学も含む）や工学で広く応用されていて，方程式の求解や解析の手段として頻繁に用いられる．

[参考文献]

- 木村英紀，Fourier-Laplace 解析．岩波講座「応用数学」，岩波書店，1999年，第1章．
- 矢野健太郎，石原繁，解析学概論（新版）．裳華房，1982年，第IV部．
- M. R. Spiegel, Fourier Analysis with application to boundary value problems. Schaum's outline series, McGraw-Hill, 1974, 191 pp.

1.1 級数展開

与えられた関数を有限個もしくは無限個の既知の関数の和として表現することは級数展開と呼ばれる．級数展開は 1) 関数の性質を調べたり，2) それを近似したり，あるいは 3) それを具体的に計算する手段を与えるので応用上きわめて重要である．

級数展開として，現在までに習ったものとしては解析関数 $f(x)$ に対する Taylor 展開がある：

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x-a)^n + \cdots \quad (1.1)$$

Note : Taylor 級数展開では展開の係数は展開される関数 $f(x)$ の微分によって表現されている．したがって，Taylor 級数展開が可能であるためには， $f(x)$ に連続性や微分可能性が要請される．また，Taylor 級数展開は展開の中心 $x = a$ の近傍でのみ正しい表現である．しかしながら，後で見るように Fourier 級数はそのような連続性や微分可能性を仮定することなく，関数を展開するこ

とができるために Taylor 級数よりもはるかに広いクラスの関数に対して適用できる．さらに関数の定義域全体にわたって関数を級数表現できるのである．

1.2 周期関数

関数 $f(x)$ が全ての x に対して、 $f(x+T) = f(x)$ であるならば、 $f(x)$ は T の周期をもつ、もしくは周期 T で周期的である、と呼ばれる．ここで T は正の定数である．最小の T は最小周期 (the least period) もしくは、単に $f(x)$ の周期と呼ばれる．

例 1：関数 $\sin x$ は、 $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ の周期をもつ．なぜならば、 $\sin(x+2\pi), \sin(x+4\pi), \sin(x+6\pi), \dots$ は全て $\sin x$ と同じ値を持つからである．しかしながら、 2π が $\sin x$ の (最小) 周期である．

例 2： $\sin nx$ もしくは $\cos nx$ の周期は $2\pi/n$ である．ここで、 n は正の整数である．

例 3： $\tan x$ の周期は、 π である．

例 4：定数は任意の正の周期を持つ．

1.3 Fourier 級数

関数 $f(x)$ は $(-L, L)$ の範囲内で定義され、その領域の外側では $f(x+2L) = f(x)$ とする．すなわち、 $f(x)$ は $2L$ の周期をもつ．このとき $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1.2)$$

と表現できる．これは $f(x)$ の Fourier 級数もしくは Fourier 級数展開と呼ばれる．ここで Fourier 係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.3)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

で与えられる．

1.4 Fourier 係数の導出

(1.2) の両辺に $\cos \frac{n\pi x}{L}$ を乗じて, x について $-L$ から L まで積分する. このとき $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad (1.5)$$

および, $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = L\delta_{m,n}, \quad (1.6)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0. \quad (1.7)$$

ここで $\delta_{m,n}$ は Kronecker のデルタである. 上記の関係式を用いると, a_n についての公式(1.3) が得られる. 同様にして, (1.2) の両辺に $\sin \frac{n\pi x}{L}$ を乗じて x について $-L$ から L まで積分すると, b_n に関する公式(1.4) が得られる. さらに, (1.2) の両辺を関数の定義域全体にわたって積分し, その結果を a_n の公式と見比べると, a_n は $n = 0$ に対しても拡張できることがわかる.

1.5 Fourier 級数の例

以下の例で見るように, Fourier 級数を用いると無限級数の和を計算することができる.

例 1 $f(x) = x, (-\pi < x < \pi)$

Fourier 係数の公式より,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

したがって,

$$f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots \right). \quad (1.8)$$

上式で $x = \pi/2$ とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

という級数が得られる．この級数は Leibniz の級数，もしくは Euler の級数と呼ばれるものである．

例2 $f(x) = |x|$, $(-\pi \leq x \leq \pi)$
例1と同様にして

$$\begin{aligned} a_0 &= \pi, \\ a_n &= \begin{cases} 0, & n \text{ が偶数} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ が奇数} \end{cases} \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

したがって，

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right). \quad (1.10)$$

上式で $x = 0$, または $x = \pi$ とおけば，

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots. \quad (1.11)$$

例3 $f(x) = x^2$, $(-\pi \leq x \leq \pi)$
例1と同様にして

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{3}\pi^2, \\ a_n &= (-1)^n \frac{4}{n^2}, \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

したがって，

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots \right). \quad (1.12)$$

上式で $x = 0$ とおけば，

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots. \quad (1.13)$$

$x = \pi$ とおけば，

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots. \quad (1.14)$$

1.6 Fourier 級数展開に関するいくつかの注意

1.6.1 関数の定義域に関する注意

$f(x)$ が $2L$ の周期をもつならば, 係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.15)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.16)$$

からも決定することができる. ここで c は任意の実数である. $c = -L$ の特別の場合には, (1.15), (1.16) はそれぞれ (1.3), (1.4) になる.

もし $L = \pi$ ならば級数 (1.2) や係数 (1.3), (1.4), もしくは (1.15), (1.16) は特に簡単になる. この場合に関数は周期 2π をもつ.

1.6.2 係数 a_0 について

(1.2) の定数項は

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{\int_{-L}^L f(x) dx}{\int_{-L}^L dx}$$

に等しく, これは $f(x)$ の周期にわたる平均である.¹

1.6.3 関数が不連続点を持つ場合

係数 (1.3), (1.4) をもつ級数 (1.2) は x_d が不連続点のときには

$$\frac{f(x_d + 0) + f(x_d - 0)}{2}$$

に収束する.

1.6.4 余談

Fourier 級数は Taylor 級数が現われてからほぼ 100 年後の技術者である Fourier によって提案された. Fourier は当時よく知られていた Bernoulli による波動方程

¹積分を区分求積法に直すとすぐわかる.

式の変数分離解法を拡散方程式に適用して，拡散方程式の解を三角関数の無限級数として表現した．

この解の一般的な妥当性を主張するためには，時刻を 0 としたときの解，すなわち初期関数が三角関数の無限級数として表現できなければならない．しかし，初期条件は拡散方程式とは無関係に設定されるものなので，問題は任意の関数の級数展開に関わる問題となった．

Fourier の主張は任意の関数，すなわち滑らかでない関数や連続ではない関数，が何回でも微分可能な滑らかな関数である三角関数の和として表現できることをのべており，このことは当時のフランス数学界としては受け入れがたく，彼の主張の正当性を認めなかっただけでなく，論文さえも発表させなかったらしい．

1.7 Parseval の恒等式

もし， a_n, b_n が関数 $f(x)$ の Fourier 係数のとき，

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (1.17)$$

が成り立つ．これは Parseval の恒等式と呼ばれる．この式は $f(x)$ の二乗平均値が Fourier 係数の二乗和として表現できることを示している．

1.8 Fourier 級数の収束性

先に導入した Fourier 級数 (1.2) はより厳密には，

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1.18)$$

と書き表すべきである．等号の記号を用いないで記号 \sim を用いて両辺を結んだのは，(1.18) の右辺の三角関数の級数が左辺の $f(x)$ に対応することを表すためである．級数の収束に関する各種の条件が満たされるときに初めて等号で結ぶことが出来る．ここでは Fourier 級数展開の収束性について，数学的な議論を紹介する．

まず言葉の定義を与えておく．

区分的に連続な関数: 次の条件を満足するときに，有限区間 $I = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ で定義された関数 $f(x)$ は区分的に連続であると呼ばれる．

i) $f(x)$ が I で有限個の点 x_1, x_2, \dots, x_k をのぞいて連続

ii) 各不連続点 x_1, x_2, \dots, x_k で

$$f(x_i + 0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(x_i + t), \quad f(x_i - 0) = \lim_{t \rightarrow -0} f(x_i + t) \quad (1.19)$$

が存在 .

iii) I の左右両端点 a, b で

$$f(a + 0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(a + t), \quad f(b - 0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(b - t) \quad (1.20)$$

が存在 .

定理 : 関数 $f(x)$ は周期 $2L$ を持つ周期関数で , 区分的に連続であるとする . さらに $f'(x)$ も区分的に連続であるとする . このとき $f(x)$ の Fourier 級数は

- $f(x)$ が連続な点で , $f(x)$ に収束し
- $f(x)$ が不連続な点では $\frac{1}{2} \{f(x + 0) + f(x - 0)\}$ に収束する .

上記定理を証明するための方法について述べておく . なお , 関数 $f(x)$ は周期が 2π であるとする . 2π 以外の周期をもつ関数についても同様に証明できる .

準備 1 :

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos mt = \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} \quad (1.21)$$

を証明する .

準備 2 : (1.21) を用いて ,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt = \frac{1}{2}, \quad (1.22)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt = \frac{1}{2}, \quad (1.23)$$

を証明する .

準備 3 : 定理を満足する関数 $f(x)$ について

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi [f(x)]^2 dx \quad (1.24)$$

を証明する .

準備4: (1.24) を利用すると, 定理を満足する関数 $f(x)$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 \quad (1.25)$$

が証明できる.

準備5: さらに(1.25) を利用すると, 定理を満足する関数 $f(x)$ について

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) x \, dx = 0 \quad (1.26)$$

が証明できる.

準備6: $f(x)$ が周期 2π を持ち, 定理の条件を満足すれば, $f(x)$ の Fourier 級数の部分和

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.27)$$

は

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \, dt \quad (1.28)$$

となることが示せる.

定理の証明 (step 1):

$$\begin{aligned} S_m(x) - \left(\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right) &= \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(t+x) - f(x-0)}{2 \sin \frac{1}{2} t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt &+ \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t+x) - f(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2} t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt & \end{aligned} \quad (1.29)$$

を示す.

定理の証明 (step 2): (1.26) を用いて

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(t+x) - f(x-0)}{2 \sin \frac{1}{2} t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt = 0, \quad (1.30)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t+x) - f(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2} t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt = 0 \quad (1.31)$$

を示す. これらと (1.29) より定理が証明される.

1.9 Fourier 級数の複素表現 (複素 Fourier 級数展開)

Euler の恒等式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.32)$$

を使うと, 周期 $2L$ の関数 $f(x)$ の Fourier 級数はもっと簡潔に書き下すことができる. (1.32) より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

である. (1.2) の cosine, sine を Euler の関係式を用いて表せば,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}}{2} + b_n \frac{e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}}{2i} \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\pi x/L} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\pi x/L} \right\} \end{aligned} \quad (1.34)$$

ここで, $c_n = (a_n - ib_n)/2$, ($n \neq 0$) と定義する. (1.3), (1.4) を用いると

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx - \frac{i}{2L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \sin \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx. \end{aligned} \quad (1.35)$$

また (1.35) を用いると,

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \quad (1.36)$$

と表現できる. したがって, (1.34) は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad (1.37)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx, \quad (1.38)$$

と書ける. (2.13) を複素 Fourier 級数展開もしくは Fourier 級数展開の複素表示と呼び, c_n は複素 Fourier 係数と呼ばれる. なお, $f(x)$ は実数関数であったので, $c_n^* = c_{-n}$ であることに注意せよ. ここで, $*$ は複素共役を表す.²

Note 1: 周期関数 $f(x)$ が連続で, しかも $f'(x)$ も連続であって, さらに $f''(x)$ が区分的に連続であれば, $f'(x)$ の Fourier 級数は $f(x)$ の Fourier 級数を項別に微分して得ることができる.³ したがって, このように Fourier 級数を Euler の関係式を用いて複素表示しておく, Fourier 級数展開した $f(x)$ の微分や積分が容易に行うことができるようになる. (cosine や sine の微分・積分よりも指数関数の微分・積分のほうがはるかに楽であることを思い起こせばよい.)

Note 2: 複素 Fourier 係数 c_n を用いると, Parseval の恒等式は,

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (1.39)$$

と表せる.

Note 3: $c_n = c_{-n}^*$. この条件は, 複素 Fourier 級数の導出の過程で得られたものであるが, 以下で見ると $f(x)$ が実であるための条件とみなせる. (1.37) で両辺の複素共役を取ると,

$$\begin{aligned} \text{l.h.s.} &= f(x)^* = f(x), \\ \text{r.h.s.} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-in\pi x/L}. \end{aligned}$$

n の符号を入れ替えると,

$$\text{r.h.s.} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{in\pi x/L}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{in\pi x/L}. \end{aligned}$$

² i は純虚数 $i = \sqrt{-1}$ である. これは万国共通の記号と思っていたが, 数年前に電気工学の分野では純虚数は j で表すらしいことを知った. 電気工学では i は交流電流に用いられる記号 (直流電流は I) で, それと混同しないように j を用いるらしい.

³この定理の証明は省略する.

つまり

$$c_n = c_{-n}^* \quad (1.40)$$

が導かれる.

例 $f(x) = x^2, (-\pi \leq x \leq \pi)$

2.6 節の例 3 を複 Fourier 級数で表現 (計算) してみる. Fourier 係数は,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx \\ &= \begin{cases} (-1)^n \frac{2}{n^2}, & (n \neq 0), \\ \frac{\pi^2}{3}, & n = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.41)$$

したがって,

$$\begin{aligned} x^2 &= \dots - \frac{2}{3^2} e^{-3ix} + \frac{2}{2^2} e^{-2ix} - \frac{2}{1^2} e^{-ix} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{1^2} e^{ix} + \frac{2}{2^2} e^{2ix} - \frac{2}{3^2} e^{3ix} + \dots \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.42)$$