

## 地球惑星科学基礎 III 期末テスト

- i) Fourier 級数, 複素 Fourier 級数, Fourier 積分, Fourier 変換, Laplace 変換の間の互いの関係を簡潔に述べなさい ( 図解でもよい. )
- ii) 以下の微分方程式を与えられた条件のもとで Laplace 変換を用いて解きなさい. ( ただし, 解は Laplace 変換された形のままでよい. )

$$Y''(t) + 2Y'(t) + 2Y(t) = 4; \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0. \quad (1)$$

- iii)  $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ ,  $g(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}$  のとき,  $f(s)g(s) = \mathcal{L}\{H(t)\}$ , ここで,

$$H(t) = \int_0^t F(u)G(t-u) du, \quad (2)$$

を証明しなさい. (2) は  $F$  と  $G$  の畳み込み ( convolution ) と呼ばれる.

- iv) 以下の積分を実行しなさい. ( ただし,  $\alpha > 0$  とする. )

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx$

b)  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-\alpha x^2) dx$

c)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x) dx$ . ここで,  $a$  は任意の実数で,  $f(x)$  は任意関数である.

- v) 区間  $-L < x < L$  の間で定義された周期  $2L$  の実数関数が

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} \quad (3)$$

と表現できる. このとき,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (4)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (5)$$

となることを証明しなさい