地球惑星科学基礎III 中間テスト解答

2002.11.27 作成

i) Fourier 級数，複素 Fourier 級数，Fourier 積分，Fourier 変換の間の互いの関係を簡潔に述べなさい.（図解でもよい.）

解答： 省略

ii) 関数 $f(x)$ の Fourier 変換，逆 Fourier 変換を以下のように定義する：

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx}\, \mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ikx}\, \mathrm{d}k \tag{2}$$

このとき，次の関数の Fourier 変換を求めなさい.

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} \tag{3}$$

解答：

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x} e^{ikx} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x} e^{ikx} \mathrm{d}x \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{ik+\alpha} e^{(\alpha+ik)x} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{ik-\alpha} e^{(-\alpha+ik)x} \Big|_{0}^{\infty} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{ik+\alpha} - \frac{1}{ik-\alpha} \right\} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}
\end{aligned} \tag{4}$$

iii) $-L < x < L$ の範囲で定義された周期 $2L$ の関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \tag{5}$$

と表現できる．このとき，複素 Fourier 係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L} \mathrm{d}x \tag{6}$$

で与えられることを証明しなさい.

解答：(5) の両辺に $e^{-im\pi x/L}$ をかけて x について $-L \sim L$ まで積分する．このとき

$$\begin{aligned}
\text{left hand side} &= \int_{-L}^{L} f(x)e^{-im\pi x}\mathrm{d}x \qquad (7)\\
\text{right hand side} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-L}^{L} e^{i(n-m)\pi x/L}\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\sum_{n=-\infty,(n\neq m)}^{n=\infty} c_n \frac{L}{i(n-m)\pi} e^{i(n-m)\pi x/L}\Big|_{-L}^{L}}_{=0} + c_m \int_{-L}^{L}\mathrm{d}x \\
&= 2Lc_m \qquad (8)
\end{aligned}$$

したがって，

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\mathrm{d}x \qquad (9)$$

iv) 複素 Fourier 級数に関する Parseval の等式

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \qquad (10)$$

を証明しなさい．

解答：

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L}\left\{ f(x) \times \underbrace{f(x)}_{\text{複素 Fourier 級数で表現}} \right\}\mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\int_{-L}^{L} f(x)e^{in\pi x/L}\mathrm{d}x}_{(6)\ \text{with}\ n=-n} \\
&= 2L\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \qquad (11)
\end{aligned}$$