

地球惑星科学基礎 III 演習 (4)

2002-10/24 作成

1 Fourier 積分に関する問題

i) Fourier 積分には次の 2 つの表式がある .

• 第一の表式 :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{A(k) \cos kx + B(k) \sin kx\} dk, \quad (1)$$

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx dx, \quad (2)$$

$$B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx dx. \quad (3)$$

• 第 2 の表式 :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \cos k(x - x'). \quad (4)$$

上記 2 つの表式が等価であることを証明しなさい .

ii) $f(x)$ が偶関数ならば , $f(x)$ の Fourier 積分は

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha, \quad A(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx,$$

となることを示しなさい .

iii) $f(x)$ が奇関数ならば , $f(x)$ の Fourier 積分は

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\alpha) \sin \alpha x d\alpha, \quad B(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx,$$

となることを示しなさい .

iv) 次の関数の Fourier 積分表示を求めなさい . ただし , $a > 0$ とする .

a)

$$f(x) = e^{-a|x|}. \quad (5)$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & (x < 0) \\ \frac{1}{2}, & (x = 0) \\ e^{-ax}, & (x > 0) \end{cases} \quad (6)$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & (x > 0) \\ 0, & (x = 0) \\ -e^{ax}, & (x < 0) \end{cases} \quad (7)$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & (|x| < \pi/2) \\ 0, & (|x| > \pi/2) \end{cases} \quad (8)$$

参考文献

[1] 和達三樹, 例解 物理数学演習, 岩波書店 (1990).

[2] M. R. Spiegel, Fourier Analysis, McGraw-Hill(1974).