# 地球惑星科学基礎III 演習 (3)

2002-10/24 作成，10/25, 11/1, 11/3 改訂

## 1　Fourier 変換に関する問題

i) a) 次の関数の Fourier 変換を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \tag{1}$$

b) $a = 3$ として, $f(x)$ とその Fourier 変換を図示しなさい.

ii) a) 前問の結果を用いて, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha a\ \cos \alpha x}{\alpha}\, \mathrm{d}\alpha$ の値を見積もりなさい.

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u$ の値を求めなさい.

iii) a) $f(x)$ が偶関数の時, Fourier 変換の公式は以下のように与えられることを示しなさい.

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx\, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \cos kx\, \mathrm{d}k. \tag{3}$$

**ヒント：** $\hat{f}(k)$ が (2) で与えられるとき，$\hat{f}(k)$ は偶関数か奇関数か.

b) $f(x) = e^{-m|x|}$, $m > 0$ の Fourier 変換を求めなさい.

c) 前設問の結果を用いて,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + m^2}\, \mathrm{d}k = \frac{\pi}{2m} e^{-mx}, \qquad (m > 0,\ x > 0)$$

を示しなさい.

iv) 積分方程式

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 - \alpha, & 0 \le \alpha \le 1, \\ 0, & \alpha > 1, \end{cases} \tag{4}$$

を解きなさい.

v) Fourier 変換に関する以下の性質を証明しなさい. ここで，$\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$, $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\}$ とする.

a) $\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\} + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}$

b) $\mathcal{F}\{f(x - \alpha)\} = e^{-ik\alpha} \mathcal{F}\{f(x)\}$

c) $\mathcal{F}\{e^{-\alpha x}f(x)\} = \hat{f}(k - i\alpha)$
d) $\mathcal{F}\{f(\gamma x)\} = \dfrac{1}{|\gamma|}\hat{f}\left(\dfrac{k}{\gamma}\right), \quad (\gamma \neq 0)$
e) $f(x)$ が微分可能で, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ のとき, $\mathcal{F}\left\{\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right\} = ik\mathcal{F}\{f(x)\}$

か述べなさい.

## 2 畳み込みに関する問題

$f(x)$ と $g(x)$ の畳み込みを $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u$ で定義する. このとき以下の設問に答えなさい.

i) 畳み込みの定理 $\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}$ を証明しなさい.
ii) $f * g = g * f$ を証明しなさい.
iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ を証明しなさい.
iv) $f * (g + h) = f * g + f * h$ を証明しなさい.

## 参考文献

[1] 和達三樹, 例解　物理数学演習, 岩波書店 (1990).

[2] M. R. Spiegel, Fourier Analysis, McGraw-Hill(1974).