

地球惑星科学基礎 III 演習 (2)

2002-10/18 作成, 10/25 改訂

1 複素 Fourier 級数に関する問題

i) $-L < x < L$ の範囲で定義された周期 $2L$ の関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad (1)$$

と表現できる. このとき, 複素 Fourier 係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (2)$$

で与えられることを証明しなさい.

ii) $-L < x < L$ の範囲で定義された周期 $2L$ の関数 $f(x) = e^{kx}$ は

$$f(x) = \frac{\sinh(kL)}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{k + i(n\pi/L)}{k^2 + (n\pi/L)^2} e^{in\pi x/L} \quad (3)$$

となることを証明しなさい.

iii) 複素 Fourier 級数に関する Parseval の等式

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (4)$$

を次の 2 通りの方法で証明しなさい.

a) 方程式(1), (2) を使って証明する.

b) (複素でない) Fourier 級数の Parseval の恒等式を使って証明する.

参考文献

[1] 和達三樹, 例解 物理数学演習, 岩波書店 (1990).