地球惑星科学基礎III 演習 (1)

2002-10/2, 4, 11, 18 改訂

1　Euler の関係式

i) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ を Euler の関係式を用いて証明しなさい．

ii) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha$ を Euler の関係式を用いて証明しなさい．

iii) i^i を実数で表現しなさい．

iv) $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ を証明しなさい．

v) 双曲線関数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{1}$$

は $\sinh x = -i\sin(ix)$ であることを確かめなさい．同様に双曲線関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{2}$$

は $\cosh x = \cos(ix)$ であることを確かめなさい．

vi) $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$ を前設問の結果を使って証明しなさい．同様に $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$ を前設問の結果を使って証明しなさい．

2　振動の微分方程式について

i) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

が

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

の解を持つことを示しなさい．ここで，A, B は任意定数である．またこの解が以下の形にかけることを示しなさい：

$$\begin{aligned} x &= C\cos(\omega t + \alpha), \\ &= D\sin(\omega t + \beta), \\ &= C\ \mathrm{Re}\left[e^{i(\omega t+\alpha)}\right], \\ &= D\ \mathrm{Im}\left[e^{i(\omega t+\beta)}\right]. \end{aligned}$$

さらに, $C,\ D,\ \alpha,\ \beta$ を $A,\ B$ で表現しなさい.

3　Fourier 級数の問題

i) 以下の関数を図示しなさい.

a) $f(x)=\begin{cases}3, & (0<x<5)\\ -3, & (-5<x<0)\end{cases}$

周期は 10 とする.

b) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & (0\le x\le\pi)\\ 0, & (\pi<x<2\pi)\end{cases}$

周期は 2π とする.

ii) $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき, $\displaystyle\int_{-L}^{L}\sin\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=\int_{-L}^{L}\cos\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=0$ となることを証明しなさい.

iii) 以下の関係式を証明しなさい.

a) $$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & (m\ne n)\\ L, & (m=n)\end{cases}$$

b) $$\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=0$$

iv) もし級数 $\displaystyle A+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\,\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ が $(-L,\ L)$ の区間で関数 $f(x)$ に一様に収束するならば,

a) $$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

b) $$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

c) $$A=\frac{a_0}{2}$$

となることを証明しなさい.

v) a) 以下の関数に対応する Fourier 係数を求めなさい.

$f(x)=\begin{cases}0, & (-5<x<0)\\ 3, & (0<x<5)\end{cases}$ 周期は 10 とする.

b) 対応する Fourier 級数を書き下しなさい.

c) $-5\le x\le 5$ の区間で Fourier 級数が $f(x)$ に収束するためには, $f(x)$ は $x=-5,\ 0,\ 5$ においてどのように定義されるべきであるか.

vi) $-\pi<x<\pi$ において $f(x)=x^2$ となる周期 2π の関数を Fourier 級数展開しなさい.

vii) 前設問の結果を用いて, $\displaystyle\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ を証明しなさい.

viii) 偶関数を Fourier 級数展開したときには sine の項は現われないことを証明しなさい.

ix) $f(x)$ が奇関数のとき, Fourier 係数は

a) $a_n = 0$

b) $b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x,$

となることを証明しなさい.

x) 周期が 2π の 関数 $f(x)$ （ただし，$f(x)=0, (-\pi<x<0), f(x)=\sin x, (0<x<\pi)$）を Fourier 級数展開しなさい.

4 Parsevalの恒等式の問題

i) 周期 $2L$ の関数 $f(x)$ が区間 $(-L, L)$ において $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\,\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ に収束するとき, Parseval の恒等式

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \tag{3}$$

を証明しなさい.

ii) 次の関数を Fourier 級数展開しなさい:

a) $f(x)=\begin{cases} x, & (0\le x<2) \\ -x, & (-2\le x<0)\end{cases}$

周期 4.

b) 前設問の Fourier 級数に対応する Parseval の恒等式を書き下しなさい.

c) 前設問の結果をもちいて, 級数

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\frac{1}{n^4}+\cdots \tag{4}$$

を求めなさい.

iii) 正の定数 M について,

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,\mathrm{d}x \ge \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{M}\left(a_n^2+b_n^2\right) \tag{5}$$

となることを証明しなさい．ただし，ここで a_n, b_n は $f(x)$ の Fourier 係数で $f(x)$ は $(-L, L)$ で区分的に連続であるとする.

参考文献

[1] A. P. French, Vibrations and Waves. W. W. Norton & Company, (1971).

[2] M.R.Spiegel, Fourier analysis with applicationa to boundary value problems. McGraw-Hill, (1974).